

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(x) \geq 0$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 $S=$ (마) ... [3점]

오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $[a, b]$ 에 속하는 임의의 x 에 대하여 곡선 $y=f(t)$ 와 t 축 및 두 직선 $t=a, t=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $G(x)$ 라고 하자. 이때 $G(x)$ 는 연속함수이고 (가) ... [3점]이다.

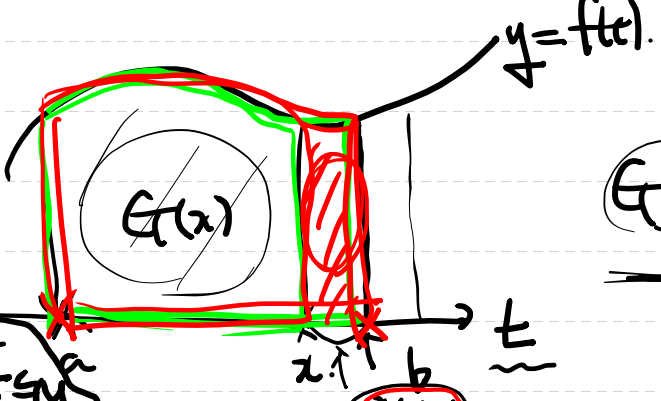
여기서 $a < x < b$ 일 때, x 의 증분 Δx ($\Delta x > 0$)에 대한 $G(x)$ 의 증분을 ΔG 라고 하면 $\Delta G = G(x+\Delta x) - G(x)$ 이다. 이때 함수 $f(t)$ 는 닫힌구간 $[x, x+\Delta x]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 그 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라고 하면 $m\Delta x \leq \Delta G \leq M\Delta x$ 이므로 (나) ... [3점]

이다. ($\Delta x < 0$ 일 때에도 마찬가지로 (나)임을 보일 수 있다. 함수 $f(t)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이므로 $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때 $m \rightarrow f(x), M \rightarrow f(x)$ 이다. 따라서 $G'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} = f(x)$ 이므로 함수 $G(x)$ 는 $f(x)$ 의 (다) 중 하나이다. ... [3점] 한편 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면 $a < x < b$ 일 때 $G'(x) = f(x) = F'(x)$ 이므로 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $G(x) = F(x) + C$ 인 상수 C 가 존재한다. 이때 $G(a) = F(a) + C =$ (라) 이므로 $C =$ (라) 이다. ... [3점] 따라서 다음이 성립한다. $S = G(b) - F(b) + C = F(b) - F(a) =$ (마) ... [3점]

정적분의 기본정리 (미적분학 기본정리 II).

$[a, b] \sim b$ (순방향).

$S = \int_a^b f(x) dx =$ (마).

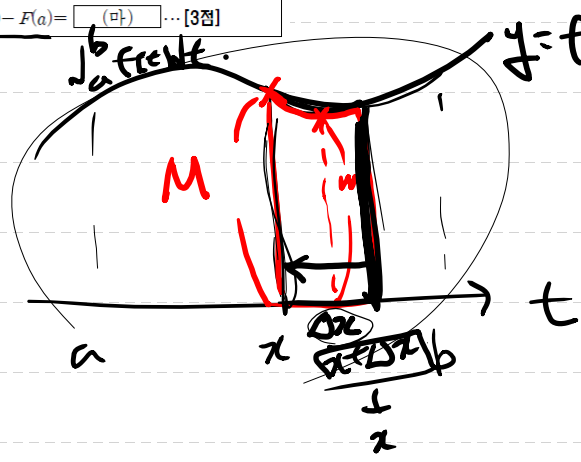


$G(x) = \int_a^x f(t) dt$ (가).

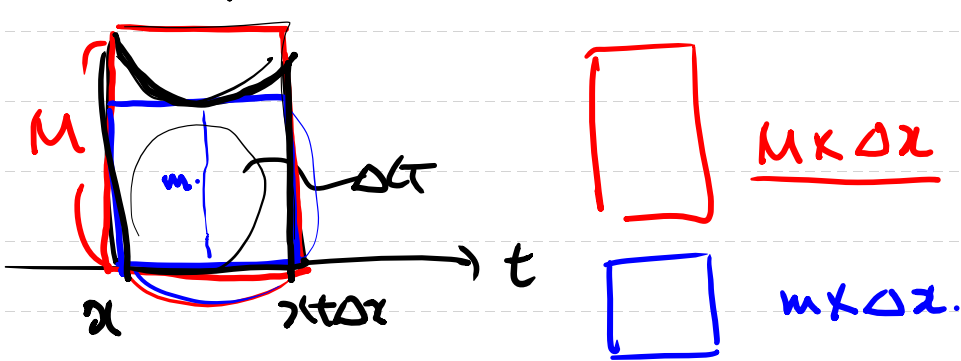
$a < x < b$ 가의 증가량 ($\Delta x > 0$)에 대한.

$G(x)$ 의 증가량 ΔG .

$\Delta G = G(x + \Delta x) - G(x)$.



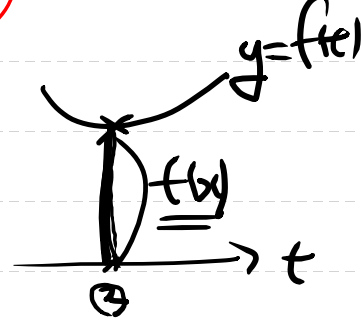
$f(t)$ 는 $[x, x+\Delta x]$ 에서 연속이므로 최댓값 M , 최솟값 m 을 갖는다.



$m \cdot \Delta x \leq \Delta G \leq M \cdot \Delta x$ ($\Delta x > 0$)

$\div \Delta x$. $m \leq \frac{\Delta G}{\Delta x} \leq M$.

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} M$



$\Downarrow$
 $f(x) \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} \leq f(x)$
 $\Downarrow$
 $f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} = f(x)$ $g=f(x)$

$G'(x) = f(x)$ G 의 미분 f . f 의 부정적분 G 이다. $G(x) = F(x) + C$

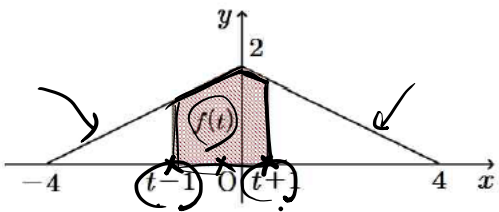
$\Rightarrow G(x) = F(x) + C$: $\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$

$x=a$ $0 = F(a) + C$: $C = -F(a)$

$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$ $x=b$ 일 때 $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

[논술형 2] 그림과 같은 두 직선 $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형을 S_1 , 실수 t 에 대하여 두 직선 $x = t-1$, $x = t+1$ 사이의 영역을 S_2 라 하자. $S_1 \cap S_2$ 의 넓이를 $f(t)$ 라 할 때 $-1 \leq t \leq s$ 에서 $f(t)$ 의 최댓값을 $g(s)$ 라고 하자. 정적분 $\int_{-1}^3 g(s)ds$ 를 구하는 풀이과정을 서술하고 답을 쓰시오. (13)

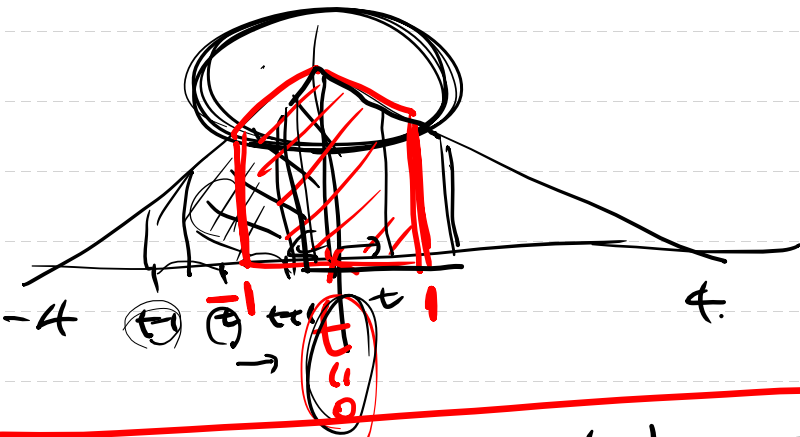
[8.0점]



구간별 풀이 ②

(1) 구간: $-1 \leq t \leq 0$

(2) 구간: $0 \leq t \leq 1$



결과
=>

최대값 t 가 넓이에 가장 큰 수를 : $|t|$ 가 작을수록 넓이가 커진다.

$-1 \leq s \leq 3$

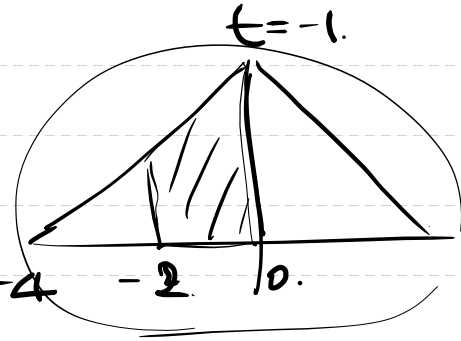
$g(s)$: $-1 \leq t \leq s$ 일때 $f(t)$ 의 최댓값.

$s = -1$

$-1 \leq t \leq -1$

$t = -1$

$f(t)$



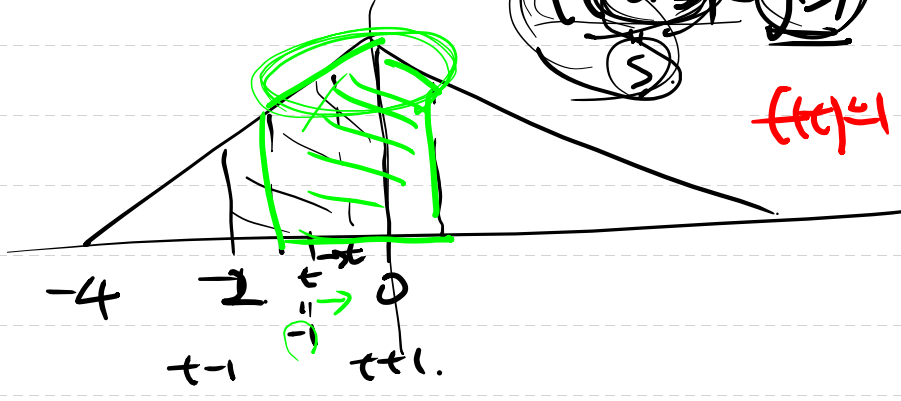
$s = -0.5$

$-1 \leq t \leq -0.5$

$f(t)$ 의 최댓값

$f(-0.5) = g(s)$

$f(t)$ 의 최댓값은 t



$s = 0$

$-1 \leq t \leq 0$

$f(t)$ 의 최댓값

$f(0) = g(s)$
 $f(s) =$

$s = 1$

$-1 \leq t \leq 1$

$f(t) = 1$ 일때

$f(1) = g(s)$

$s = 2$

$-1 \leq t \leq 2$

$f(t) =$

$f(2) = g(s)$

$s = 3$

$-1 \leq t \leq 3$

$f(t) =$

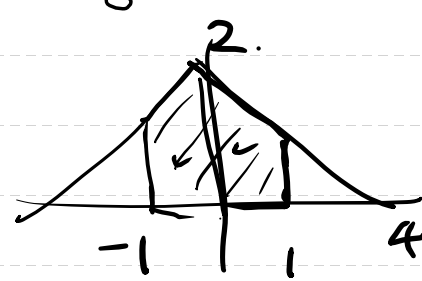
$f(3) = g(s)$

$s > 0$

$-1 \leq t \leq s$

$f(t)$ 의 최댓값

$f(s) = g(s)$



$f(s) = g(s) = \frac{1}{2}$

$g(s) = \int_{-1}^3 \frac{1-s^2}{2} ds$ $s > 0$
 $\frac{1-s^2}{2}$ $s < 0$

$s < 0$

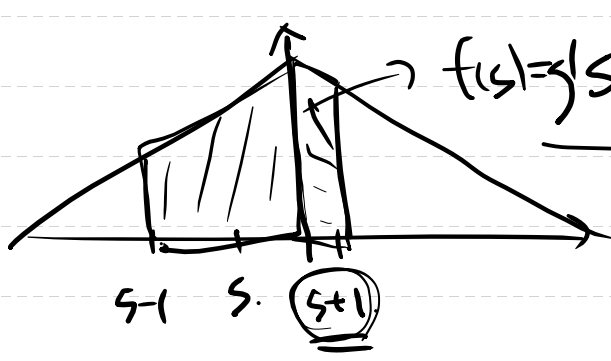
$-1 \leq t \leq s$

$f(t)$ 의 최댓값

$f(s) = g(s)$

$-1 \leq s$

$0 \leq s+1$



$f(s) = g(s) = \frac{1-s^2}{2}$ $s < 0$

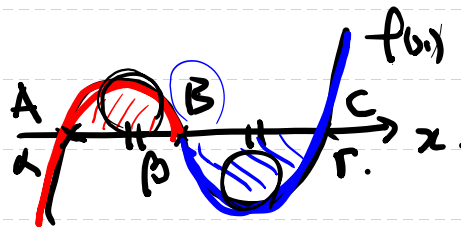
$g(s) = \int_{-1}^3 \frac{1-s^2}{2} ds$ $s > 0$
 $\frac{1-s^2}{2}$ $s < 0$

$\int_{-1}^3 g(s)ds = \int_{-1}^0 \frac{1-s^2}{2} ds + \int_0^3 \frac{1}{2} ds$
 $= \frac{10}{3} + \frac{21}{2} = \frac{83}{6}$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) = f'(-x)$, $f'(1) = 0$, $f(1) = 1$ 를 만족시킨다. 임의의 실수 m 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = -f(x-m) + 6$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [6.0점]

- <보기>
- ㉠ 모든 실수 a 에 대하여 $\int_{-a}^a f(x)dx = 6a$ 이다.
 - ㉡ 함수 $g(x)$ 의 극댓값은 5이다.
 - ㉢ 함수 $f(x)$ 의 그래프와 함수 $g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$, $(\gamma, f(\gamma))$ 에서 만나면 $\int_{\alpha}^{\gamma} \{f(x) - g(x)\}dx = 0$ 이다. (단, $\alpha < \beta < \gamma$)
- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$



위 아래 부분별/전체 동일.

B가 $y = f(x)$ 의 변곡점이다.

$$3. \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx = 0$$

note). 대칭성.

① $f(-x) = f(x)$ y축. $x=0$ 대칭

② $f(-x) = -f(x)$ (0,0) 원점 대칭

③ $f(a-x) = f(a+x)$ $x=a$ 대칭

④ $f(a-x) = f(b+x)$ $x = \frac{a+b}{2}$ 대칭

① $f(a-x) + f(a+x) = 0$ (a,0)

② $f(a-x) + f(b+x) = 0$ ($\frac{a+b}{2}$, 0)

③ $f(a-x) + f(a+x) = c$ (a, $\frac{c}{2}$)

④ $f(a-x) + f(b+x) = c$ ($\frac{a+b}{2}$, $\frac{c}{2}$)

$x=a$ 대칭.

$f(a-x) = f(a+x)$: 대칭 2번.

$f(2a-x) = f(b+x)$ $x = \frac{2a+b}{2}$: $x=a$ 대칭.

(변환 대칭).

ㄷ. $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 세 그림.

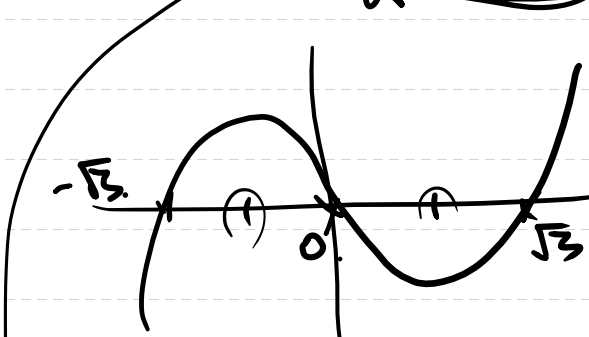
㉠ ㉡ ㉢ $\alpha < \beta < \gamma$.

$f(x) = x^3 - 3x + 3$

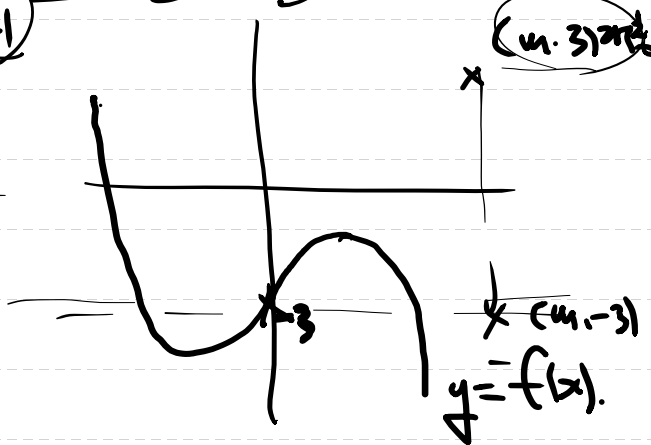
$\Rightarrow f(x) - 3 = x^3 - 3x$

$g(x) = -f(x-m) + 6$

$\int_{\alpha}^{\gamma} (f(x) - g(x))dx = 0$



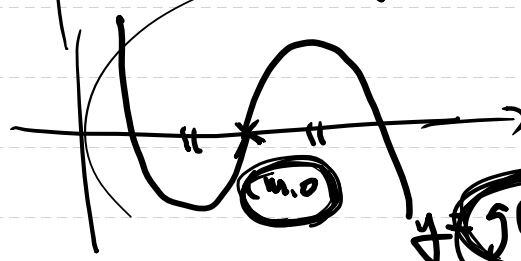
$f(x) - 3 = x^3 - 3x$



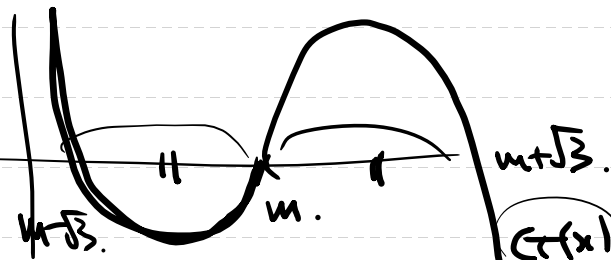
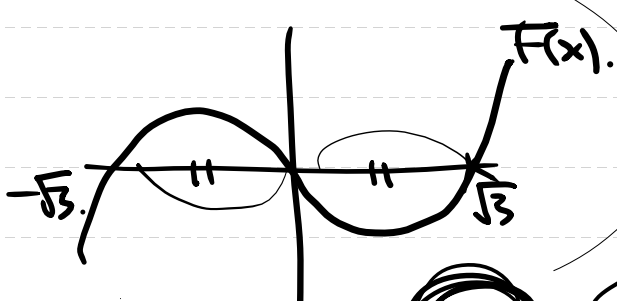
$\int_{\alpha}^{\gamma} (f(x) - g(x))dx = 0$

$F(x) = f(x) - 3$

$\int_{\alpha}^{\gamma} (F(x) - G(x))dx = 0$



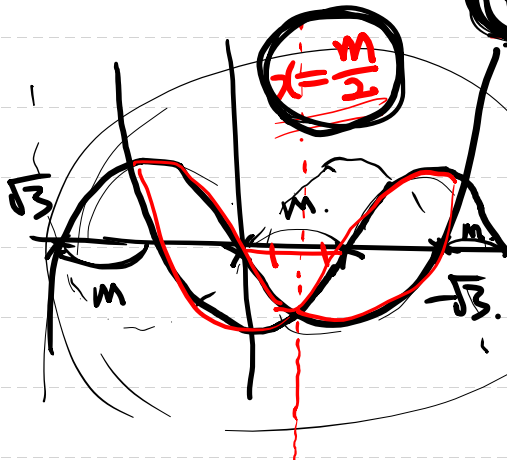
$F(x) = f(x) - 3 = x^3 - 3x$



$F(x) = x^3 - 3x$

$G(x) = -F(x-m) + 3$

$-F(x-m)$



$h(m-x) = h(x)$

$h(x) = F(x) + F(x-m)$

$h(x) = F(x) + F(x-m)$

$h(m-x) = F(m-x) + F(-x)$

$= -F(x-m) - F(x)$

$= -(F(x) + F(x-m))$

$$\underline{h(m-x)} = -h(x)$$

$$\underline{h(m-x) + h(x) = 0.}$$

$$\underline{h(m-x) + h(0+x) = 0.}$$

$h(x) \neq$

$$\underline{\left(\frac{m}{2}, 0\right)} \text{ center}$$

$$7\pi \Rightarrow f(a-x) + f(b+x) = 0 \quad \left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$$

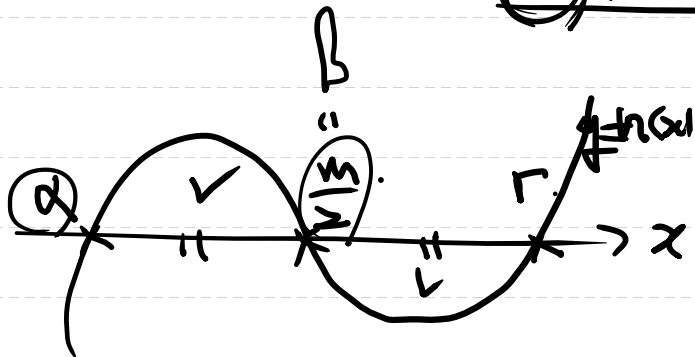
$$\underline{h(x)} = F(x) - G(x) = (x^3 + 2) - (-x^3 + 2)$$

$$= 2x^3 + \sim$$

$$\underline{3x^2 + F}$$

$$\left(\frac{m}{2}, 0\right) \text{ center}$$

$h(x) \neq$ $\frac{h(x)}{h(x)}$



$$\underline{\int_a^r h(x) dx = 0.}$$

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}, g(x)=\begin{cases} x(4-x) & (|x-2| \leq 2) \\ 0 & (|x-2| > 2) \end{cases}$$

이다. 양의 실수 a, b ($a < b < 4$)에 대하여, 함수 $h(x)$ 를 $h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-4)\}$ 라 정의하자.

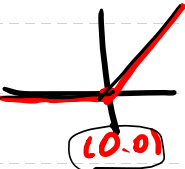
모든 실수 x 에 대하여 $0 \leq h(x) \leq g(x)$ 일 때,

$3(k+a+b)$ 의 값을 구하면? [5.9점]

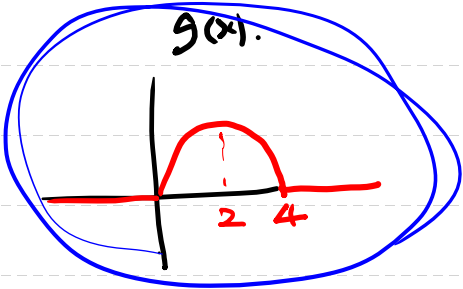
- ① 20
- ② 30
- ③ 40
- ④ 50
- ⑤ 60

$$-2 \leq x-2 \leq 2$$

$f(x)$



$g(x)$



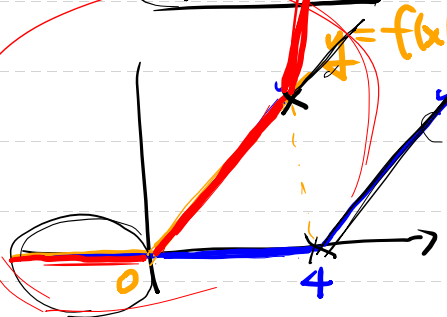
$$0 < a < b < 4, \quad k > 0. \quad (f(x-b) - f(x-4))$$

$$h(x) = k \{ f(x) - f(x-a) - f(x-b) + f(x-4) \}$$

$y = h(x)$ 어떻게 그려나?

4개 줄기예? 2개만 우선.

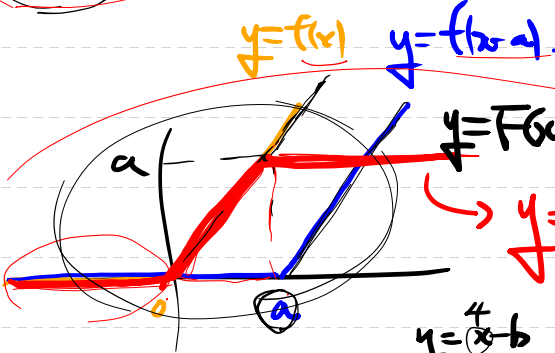
$$y = f(x) + f(x-4)$$



$$x < x-4 = 2, -4 \\ x=4 \quad f=4$$

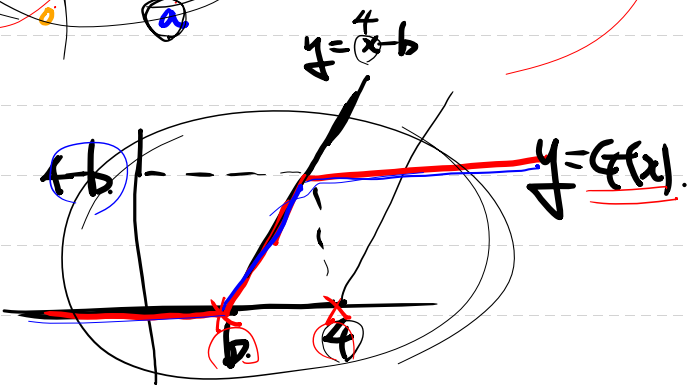
win

$$y = f(x) - f(x-a) \\ F(x)$$



$$y = F(x) \quad x - (x-a) = a \quad y=a \\ y = f(x) - f(x-a)$$

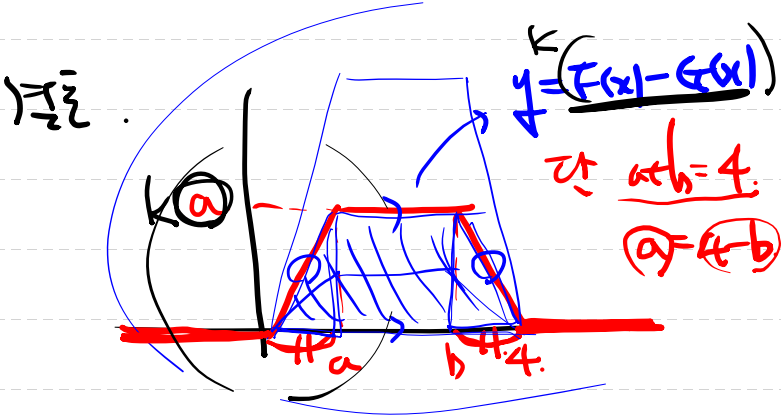
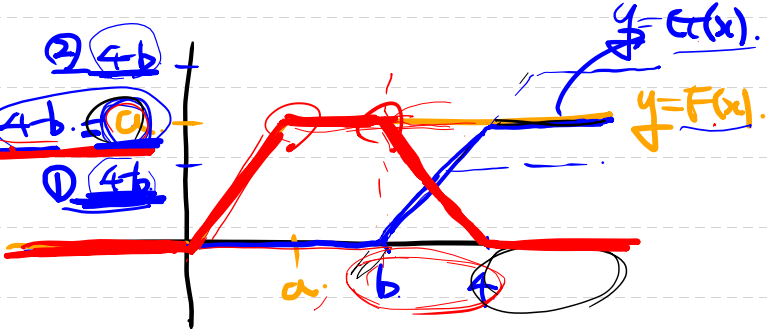
$$y = f(x-b) - f(x-4) \\ G(x)$$



$$h(x) = k \{ F(x) - G(x) \}, \quad k > 0.$$

$a, 4-b$ 비교?

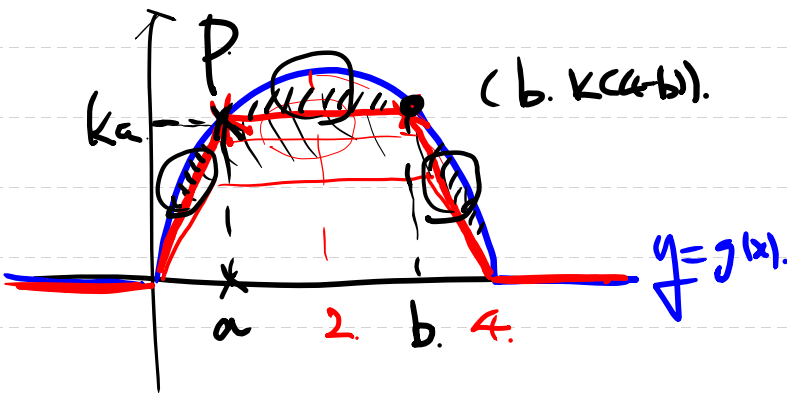
가능성 높은 case 분리 $a+b=4$ ← ② 4-b, 0, 0, 4-b
경도. (정식, 복경식)



$$b \leq x \leq 4 \quad F(x) = a, \quad G(x) = x-b$$

$$F-G = a - x + b = -x + 4, \quad a+b=4 \\ y = -x+4 \\ x > 4 \quad F-G = a-a=0.$$

$$k \quad a=4-b$$



$$0 \leq h \leq g$$

$$\int_0^4 (g-f) dx \geq 1k. \\ \geq 0. \\ 123.$$

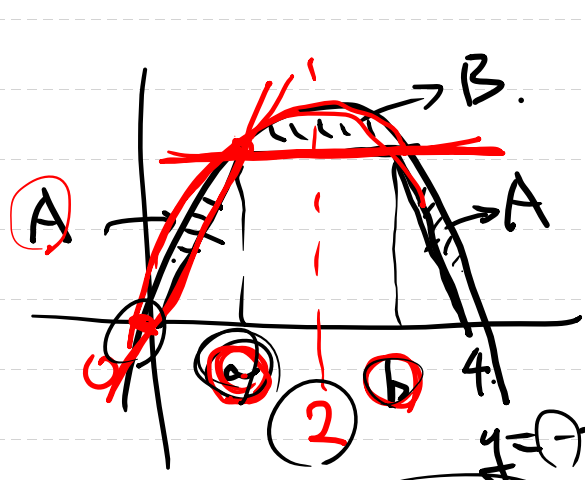
$$p(a, k) \text{가 } y = g(x) = x(4-x) \text{일 때}$$

$$k a = p(4-a), \quad a > 0$$

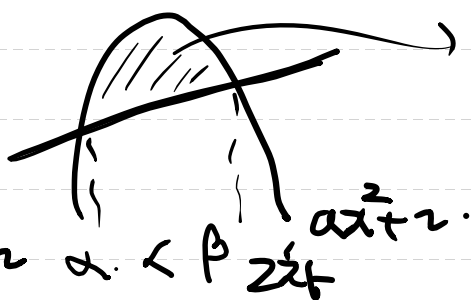
$$\textcircled{1} \quad k = 4-a$$

$$\textcircled{2} \quad a+b=4, \quad b=4-a$$

$$3(k+a+b) = 3\left(\frac{4-a}{k} + a + \frac{4-a}{b}\right) = 3(8-a) = 24-3a \quad a?$$



$$\int_0^4 g - f dx = 2A + B.$$



$$S = \frac{|a|}{6} (4 - a)^3.$$

점과 직선

$$a + b = 4 \quad b = 4 - a.$$

$$A = \frac{1-a}{6} (a-0)^3.$$

$$B = \frac{1-1}{6} (b-a)^3 = \frac{1}{6} (4-2a)^3 = -\frac{4}{3} (a-2)^3.$$

$$\int_0^4 g - f dx = 2A + B = \frac{1}{3} a^3 - \frac{4}{3} (a-2)^3 = S(a) \text{가 최대일 때 } a?$$

$$S'(a) = \frac{1}{3} (a^3 - 4(a-2)^3)' = \frac{1}{3} (3a^2 - 12(a-2)^2) = 0$$

$$a^2 - 4(a-2)^2 = 0.$$

$$-3a^2 + 16a - 16 = 0$$

$$3a^2 - 16a + 16 = 0.$$

$$\frac{16 \pm \sqrt{64 - 40}}{3} = \frac{8 \pm 4}{3} \Rightarrow \frac{12}{3}, \frac{4}{3}$$

$$\therefore a < 2 \text{ 이므로 } a = \frac{4}{3}.$$

$$24 - 3a = 24 - 4 = 20$$

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x)=\int_2^x xf(t)dt\text{에 대하여 함수 } h(x)\text{를}$$

$$h(x)=\begin{cases} f(-x) & (x\leq 0) \\ g(x) & (x\geq 0) \end{cases}\text{이라 하자. 함수 } h(x)\text{가 실수 전체의}$$

집합에서 미분가능하고 함수 $h(x)$ 의 극댓값이 5일 때, $f(-2)$ 의 값은? [5.7점]

- ① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

$$h: x=0\text{에서 } f(0)=g(0)=0.$$

$$x=0\text{에서 } -f'(0)=g'(0)$$

$$\Rightarrow -f'(0)=g'(0)=-\int_0^2 f(t)dt.$$

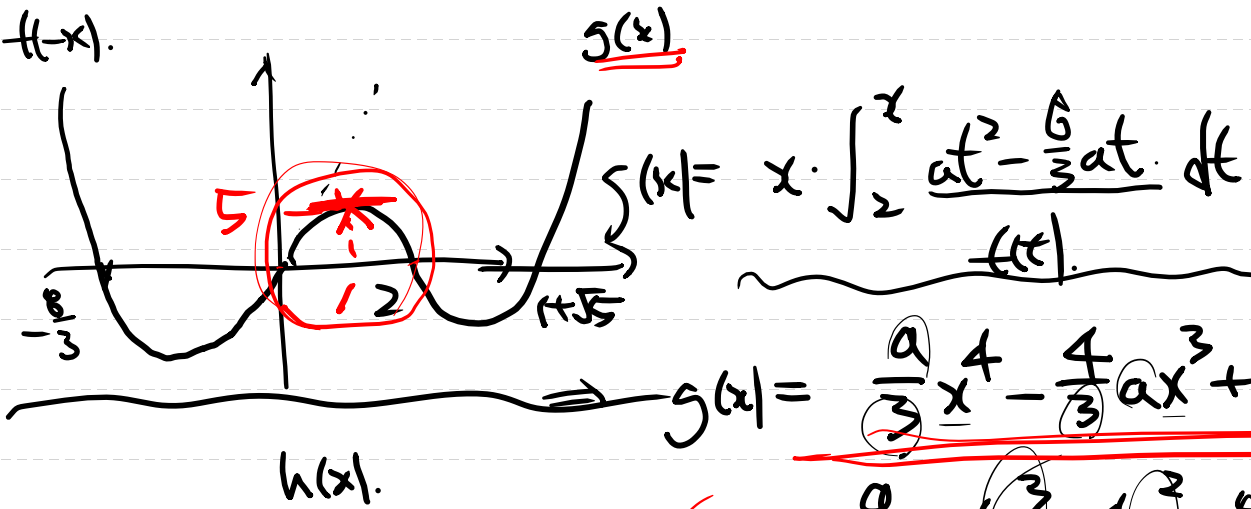
$$\textcircled{1} f(0)=0. \textcircled{2} f(0)=\int_0^2 f(t)dt.$$

$$\textcircled{1} f(x)=ax^2+bx \quad a>0.$$

$$\textcircled{2} b=\int_0^2 at^2+bt\,dt. \Rightarrow \boxed{b=-\frac{8}{3}a}$$

$$f(x)=ax^2-\frac{8}{3}ax$$

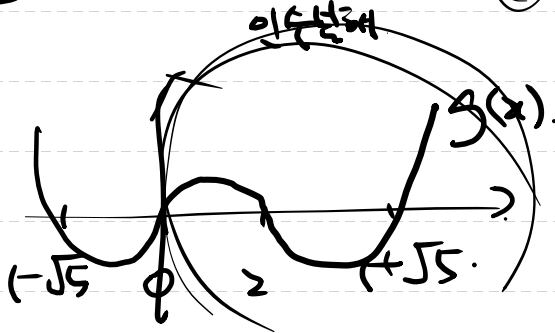
$$=ax(x-\frac{8}{3})$$



$$g(x)=x\cdot\int_2^x \frac{at^2-\frac{8}{3}at}{f(t)}\,dt$$

$$g(x)=\frac{a}{3}x^4-\frac{4}{3}ax^3+\frac{8}{3}ax$$

$$=\frac{a}{3}x(x^3-4x^2+8)=\frac{a}{3}x(x-2)(x^2-2x-4)$$



$$x=\frac{1}{2}.$$

$$g'(x)=0 \quad \underline{0 < x < 2} \quad \boxed{x=1} \quad g(1)=5 \Rightarrow \boxed{a=3}.$$

$$f(-2)?$$

$$28.$$

$$f(x)=ax^2-\frac{8}{3}ax=3x^2-8x$$

[논술형 1] 둘레의 길이가 20인 원 위에 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 같은 지점에서 출발하여 같은 방향으로 움직이는 두 점 P, Q의 출발한 지 t 분 후의 위치를 각각 x_1, x_2 라고 하면 $x_1 = t^3$, $x_2 = 3t^2$ 이다. 두 점 P, Q가 동시에 출발한 후 5분 동안 몇 번 만나는지를 구하는 과정을 서술하시오.³⁹⁾ [8.0점]

[논술형 2] 길이가 25m인 선분 AB가 있다. 이 선분 위에 점 P와 Q가 있다. 점 P는 점 A를 출발하여 점 B를 향해서 u m/초의 등속도 운동을 하고, 점 Q는 같은 시각에 점 B를 출발하여 $v = \frac{3}{4}t^2 - 3t$ (m/초)의 속도로 점 A를 향해서 움직이다가 도중에서 다시 점 B로 되돌아가는 왕복운동을 한다. 점 Q가 한 번 왕복운동하는 동안 점 P와 점 Q가 적어도 한 번 겹치게 되는 u 의 최솟값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하시오. [5.0점]

