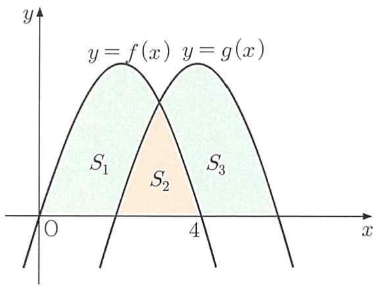
2015학년도 사관기출 A형 16번

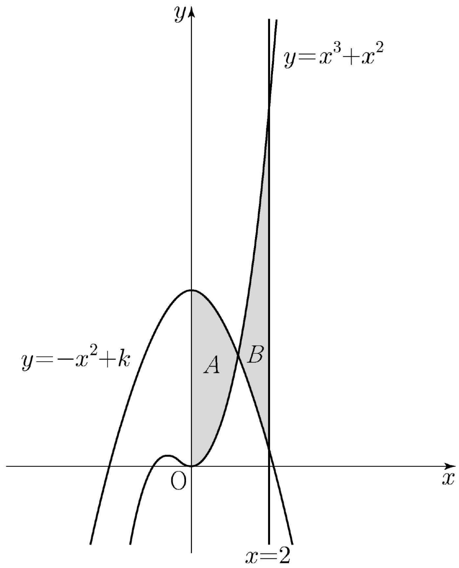
1. 함수 $f(x)=-x(x-4)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=g(x)$라 하자. 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 세 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때, $\dfrac{S_2}{S_1+S_3}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{3}{22}$　② $\dfrac{7}{44}$　③ $\dfrac{2}{11}$
④ $\dfrac{9}{44}$　⑤ $\dfrac{5}{22}$

2023학년도 수능기출 10번

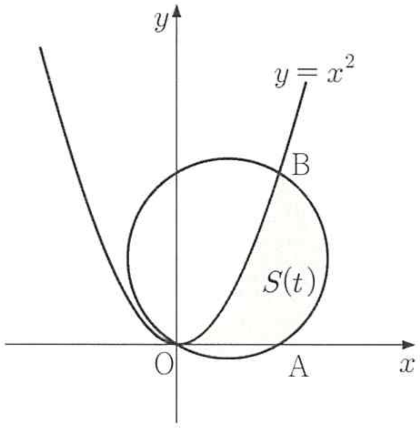
2. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$ 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$) [4점]



① $\dfrac{25}{6}$　② $\dfrac{13}{3}$　③ $\dfrac{9}{2}$
④ $\dfrac{14}{3}$　⑤ $\dfrac{29}{6}$

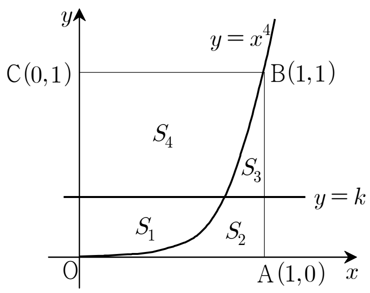
2013학년도 09월 평가원 나형 29번

3. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 양수 t에 대하여 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(t,\ 0)$, $\mathrm{B}(t,\ t^2)$을 지나는 원 C가 있다.
원 C의 내부와 곡선 $y=x^2$의 아래 부분으로 나타내는 영역의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'(1)=\dfrac{p\pi+q}{4}$이다.
p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) [4점]



2010학년도 사관기출 가형 16번

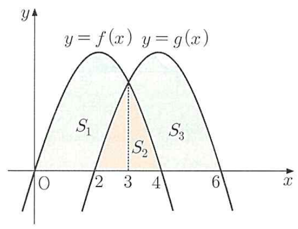
4. 좌표평면 위에 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$, $\mathrm{C}(0,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 있다. 곡선 $y=x^4$과 직선 $y=k$ $(0<k<1)$에 의해 정사각형 OABC를 네 영역으로 나눌 때, 그림과 같이 네 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라 하자. 이때, $|S_1-S_3|+|S_2-S_4|$의 최솟값은?



① $\dfrac{2}{5}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{5}$
④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{4}$

정답과 풀이

1. 정답 ⑤



곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 2만큼 이동시킨 것이고

곡선 $y=f(x)$가 x축과 $x=0$, $x=4$에서 만나므로

곡선 $y=g(x)$는 x축과 $x=2$, $x=6$에서 만난다.

즉 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는

직선 $x=\dfrac{4+2}{2}=3$에 대하여 대칭이므로

두 곡선의 교점의 x좌표는 3이고 $S_1=S_3$

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3(-x^2+4x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^3=9$$

$$\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4(-x^2+4x)dx=\left[-\frac{x^3}{3+2x^2}\right]_3^4=\frac{5}{3}$$

$\displaystyle\int_2^3 g(x)dx=\int_3^4 f(x)dx$이므로

$$S_1=\int_0^3 f(x)dx-\int_2^3 g(x)dx=9-\frac{5}{3}=\frac{22}{3}$$

$$S_2=\int_2^3 g(x)dx+\int_3^4 f(x)dx=2\times\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$$

따라서 $\dfrac{S_2}{S_1+S_3}=\dfrac{\frac{10}{3}}{2\times\frac{22}{3}}=\dfrac{5}{22}$

2. 정답 ④

[출제의도] 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 있는가?

$\mathrm{A}=\mathrm{B}$이므로

$$\int_0^2\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=0$$

이어야 한다.

이때,

$$\int_0^2\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx$$

$$=\int_0^2(x^3+2x^2-k)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2$$

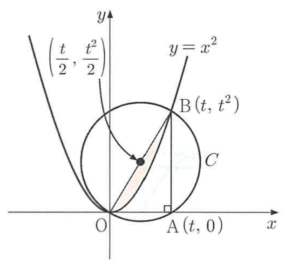
$$=4+\frac{16}{3}-2k$$

$$=\frac{28}{3}-2k=0$$

$$2k=\frac{28}{3}$$

$$k=\frac{14}{3}$$

3. 정답 13



세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(\mathrm{t},\ 0)$, $\mathrm{B}(\mathrm{t},\ \mathrm{t}^2)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB는 직각삼각형이고 지름이 $\overline{\mathrm{OB}}$인 원이므로 원 C의 반지름의 길이 r은

$r=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{t}^2+\mathrm{t}^4}$

이때 어두운 부분의 넓이는 반원에서 선분 $\overline{\mathrm{OB}}$와 $y=x^2$으로 둘러싸인 넓이를 뺀 값이다.

이때 선분 $\overline{\mathrm{OB}}$와 $y=x^2$으로 둘러싸인 넓이는

(직사각형 OAB의 넓이)$-\displaystyle\int_0^t x^2dx=\frac{1}{2}\times t\times t^2-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t$

$$=\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{3}t^3=\frac{1}{6}t^3$$

즉 $S(t)=$(반원의 넓이)$-$(선분$\overline{\mathrm{OB}}$와 $y=x^2$으로 둘러싸인 넓이)

$$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}\right)^2-\frac{1}{6}t^3=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{6}t^3$$

양변을 t에 관하여 미분하면

$S'(t)=\dfrac{1}{8}(2t+4t^3)\pi-\dfrac{1}{2}t^2$이므로 $S'(1)=\dfrac{1}{8}(2+4)\pi-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\pi-2}{4}$

따라서 $p=3$, $q=-2$이므로 $p^2+q^2=9+4=13$

다른 풀이

오른쪽 그림에서 $S_2(t)$의 넓이는

$S_2=$(반원의 넓이)$-$(직각삼각형 OAB의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}\right)^2-\frac{1}{2}\times t\times t^2$$

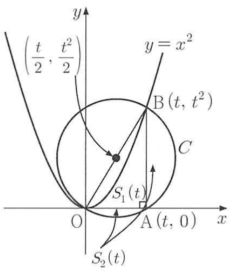
$$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{2}t^3$$

오른쪽 그림에서 $S_1(t)$의 넓이는

$$S_1=\int_0^t x^2dx$$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t$

$=\frac{1}{3}t^3$



즉 구하는 넓이 $S(t)$는

$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$

$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{3}t^3$

$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{6}t^3$

양변을 t에 관하여 미분하면

$S'(t)=\frac{1}{8}(2t+4t^3)\pi-\frac{1}{2}t^2$이므로 $S'(1)=\frac{1}{8}(2+4)\pi-\frac{1}{2}=\frac{3\pi-2}{4}$

따라서 $p=3$, $q=-2$이므로 $p^2+q^2=9+4=13$

4. 정답 ③

$S_2+S_3=\frac{1}{5}$ …… ①, $S_1+S_4=\frac{4}{5}$ …… ②

$S_1+S_2=k$ …… ③, $S_3+S_4=1-k$ …… ④

②, ④에서 $|S_1-S_3|=\left|k-\frac{1}{5}\right|$

①, ④에서 $|S_2-S_4|=\left|k-\frac{4}{5}\right|$

$|S_1-S_3|+|S_2-S_4|=\left|k-\frac{1}{5}\right|+\left|k-\frac{4}{5}\right|$

$\frac{1}{5}<k<\frac{4}{5}$일 때, 최솟값 $\frac{3}{5}$을 갖는다.