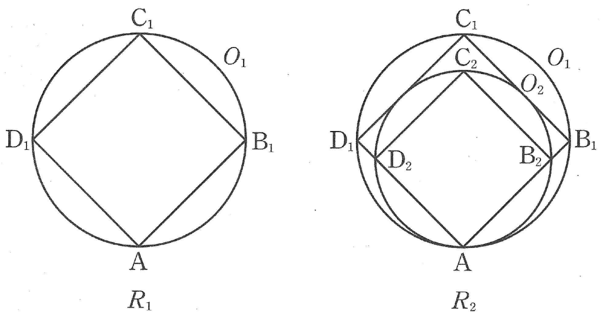
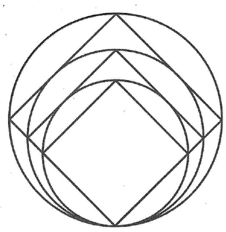
1. 1. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O_1에 내접하는 정사각형 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$을 그린 그림을 R_1이라 하자. 점 A를 지나고 두 선분 $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$에 동시에 접하는 원 O_2를 그리고 원 O_2에 내접하는 정사각형 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$를 그린 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 포함되어 있는 모든 원의 둘레의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} l_n$의 값은?



R_1 R_2



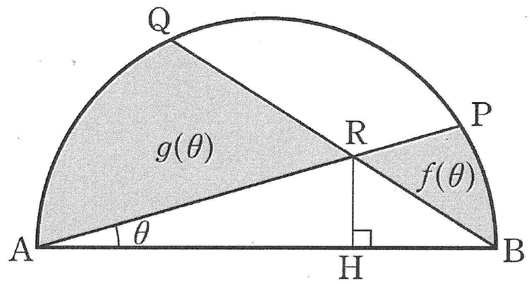
$\cdots$

R_3 $\cdots$

① $(2+2\sqrt{2})\pi$ ② $(4+2\sqrt{2})\pi$ ③ $(4+3\sqrt{2})\pi$
④ $(6+2\sqrt{2})\pi$ ⑤ $(6+4\sqrt{2})\pi$

2. 2. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P를 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$가 되도록 잡고, 호 AP 위의 점 Q를 두 호 BP, AQ의 길이의 비가 $1:2$가 되도록 잡는다. 두 선분 AP, BQ의 교점을 R, 점 R에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 두 선분 BR, PR와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}}$의 값은?

$\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{6}\right)$



① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

3. 3. 함수 $f(x)=x^3+1$에 대하여 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{g(f(x)+h)-g(f(x))}{h}=\frac{x}{(x^4+1)^3}$를 만족시킨다. $g(2)-g(1)=k$일 때, $32k$의 값을 구하시오.

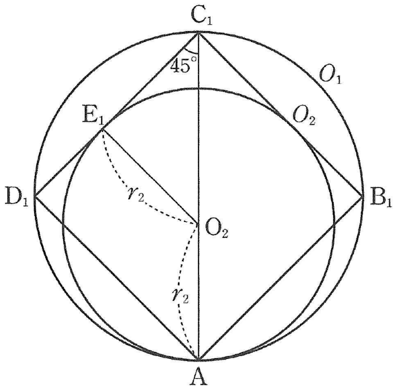
4. 4. 삼차함수 $f(x)=x^3+x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $0<a<b$를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 $\mathrm{P}(a,\ g(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ g(b))$라 하자. 선분 OP, 선분 OQ 및 구간 $[a,\ b]$에서의 함수 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 할 때, 함수 $h(a)$를

$$h(a)=\lim_{b\to a+}\frac{S}{b-a}$$

라 하자. $h(k)=\frac{1}{4}$을 만족시키는 양수 k에 대하여 $h'(k)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[정답 및 해설]

1. [정답] ⑤



원 O_n의 중심과 반지름의 길이를 각각 O_n, r_n이라 하면 원 O_2와 선분 C_1D_1이 접하는 점을 E_1이라 하면

$$\angle O_2E_1C_1 = 90°,\ \angle O_2C_1E_1 = 45°$$

이므로 삼각형 $O_2C_1E_1$은 직각이등변삼각형이다. 따라서

$$\overline{AO_2} = \overline{E_1O_2} = r_2,\ \overline{C_1O_2} = \sqrt{2}r_2$$

이므로

$$\overline{AC_1} = \overline{AO_2} + \overline{C_1O_2}$$
$$\Rightarrow 2r_1 = (1+\sqrt{2})r_2$$
$$\Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = 2\sqrt{2}-2$$

이다. 따라서 $\{r_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $2\sqrt{2}-2$인 등비수열이므로

$$r_n = (2\sqrt{2}-2)^{n-1}$$

이다. 원 O_n의 둘레의 길이는 $2\pi r_n$이므로

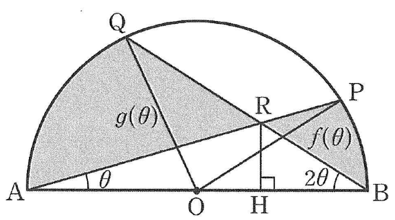
$$l_n = \sum_{k=1}^{n} 2\pi r_k = 2\pi \sum_{k=1}^{n} (2\sqrt{2}-2)^{k-1}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \frac{2\pi}{1-(2\sqrt{2}-2)} = (6+4\sqrt{2})\pi$$

이다.

2. [정답] ③



선분 AB의 중점을 O라 하자. 두 호 BP, AQ의 길이의 비가 1 : 2이므로 $\angle ABQ = 2\theta$이며

$$\angle BOP = 2\theta,\ \angle AOQ = 4\theta$$이며

이다. 삼각형 ARB에서 $\angle ARB = \pi - 3\theta$이므로 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{\overline{AR}}{\sin 2\theta} \Rightarrow \overline{AR} = \frac{2\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

이며

$$\overline{RH} = \overline{AR} \times \sin\theta = \frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

이다. $f(\theta)+g(\theta)$의 값은 두 부채꼴 OBP, OAQ의 넓이

$$\frac{1}{2}\times 1^2 \times 2\theta,\ \frac{1}{2}\times 1^2 \times 4\theta$$

와 두 삼각형 AOP, BOQ의 넓이

$$\frac{1}{2}\times 1^2 \times \sin(\pi-2\theta),\ \frac{1}{2}\times 1^2 \times \sin(\pi-4\theta)$$

의 합에서 삼각형 ARB의 넓이의 두 배를 뺀 값과 같다. 삼각형 ARB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AR}\times\sin\theta = \frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

이므로

$$f(\theta)+g(\theta) = 3\theta + \frac{\sin 2\theta + \sin 4\theta}{2} - 2\times\frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

이다. 따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta}$$
$$= \lim_{\theta\to 0+}\left(3 + \frac{\sin 2\theta+\sin 4\theta}{2\theta} - \frac{4\sin\theta\sin 2\theta}{\theta\sin 3\theta}\right)$$
$$= \frac{10}{3}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{RH}}{\theta} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\theta\sin 3\theta} = \frac{4}{3}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{RH}} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta}}{\frac{\overline{RH}}{\theta}} = \frac{5}{2}$$

이다.

3. [정답] 9

주어진 조건에 의하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x)+h)-g(f(x))}{h} = \frac{x}{(x^4+1)^3}$$
$$\Rightarrow g'(f(x)) = \frac{x}{(x^4+1)^2}$$

이다. 위의 식의 양변에 $f'(x)$를 곱해보면

$$g'(f(x))f'(x) = \frac{3x^3}{(x^4+1)^3}$$

이며, $f(0)=1$, $f(1)=2$이므로 위의 식의 양변을 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 정적분하면

$$\int_0^1 g'(f(x))f'(x)\,dx = \int_1^2 g'(t)\,dt$$
$$= g(2)-g(1)$$

이므로

$$g(2)-g(1)=\int_0^1 \frac{3x^3}{(x^4+1)^3}\,dx$$
$$=\left[-\frac{3}{8(x^4+1)^2}\right]_0^1$$
$$=-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{4}-1\right)$$
$$=\frac{9}{32}$$

이다.

$$\therefore\ 32k=9$$

4. [정답] 35

S를 a와 b로 나타내면

$$S=\int_a^b g(x)\,dx+\frac{1}{2}ag(a)-\frac{1}{2}bg(b)$$

이므로

$$h(a)=\lim_{b\to a+}\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx-\frac{1}{2}\times\frac{bg(b)-ag(a)}{b-a}\right\}$$

이다. 이때, 미적분의 기본정리에 의하여 $g(x)$의 한 부정적분 $G(x)$에 대하여

$$\int_a^b g(x)\,dx=G(b)-G(a)$$

이고, 두 극한

$$\lim_{b\to a+}\frac{G(b)-G(a)}{b-a},\ \lim_{b\to a+}\frac{bg(b)-ag(a)}{b-a}$$

는 각각 $G(x)$와 $xg(x)$의 $x=a$에서의 미분계수의 정의와 같고,

$$\{G(x)\}'=g(x),\ \{xg(x)\}'=g(x)+xg'(x)$$

이므로

$$h(a)=g(a)-\frac{1}{2}\{g(a)+ag'(a)\}=\frac{1}{2}\{g(a)-ag'(a)\}$$

이다. 따라서

$$h(k)=\frac{1}{2}\{g(k)-kg'(k)\}=\frac{1}{4}$$

이므로 정리하면

$$\frac{1}{2}=g'(k)(0-k)+g(k)$$

이고, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(k,\ g(k))$에서의 접선이 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$을 지남을 의미한다. 따라서 점 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그을 때, 접선의 y좌표가 k가 된다. $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t에 대하여 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식이

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

이고, 이 직선이 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지나므로

$$0=f'(t)\left(\frac{1}{2}-t\right)+f(t)$$

이고, $f(t)=t^3+t$와 $f'(t)=3t^2+1$을 대입하면

$$0=\left(-3t^3+\frac{3}{2}t^2-t+\frac{1}{2}\right)+t^3+t$$
$$\Rightarrow\ 2t^3-\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}=0$$
$$\Rightarrow\ (t-1)\left(2t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)=0$$

인데, $\left(2t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)>0$이므로 $t=1$이고, $k=f(1)=2$이다.

$$h'(a)=-\frac{1}{2}ag''(a)$$

이므로 구하는 값은

$$h'(2)=-g''(2)$$

이다. 이 값을 구하기 위하여

$$f(g(x))=x$$

의 양변을 두 번 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=1$$
$$f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)=0$$

이고, 이 식에 $x=2$를 대입하면

$$f''(1)\{g'(2)\}^2+f'(1)g''(2)=0$$

이므로 $f''(1)$, $g'(2)$, $f'(1)$의 값을 구해보면

$$f'(x)=3x^2+1$$

으로부터 $f'(1)=4$, $f(1)=2$이므로 $g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$이고,

$$f''(x)=6x$$

으로부터 $f''(1)=6$이다. 따라서

$$6\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+4g''(2)=0$$
$$\Rightarrow\ g''(2)=-\frac{3}{32}$$

이고, $h'(k)=\frac{3}{32}$이다.

$$\therefore\ p+q=35$$