

가톨릭대학교(자연·공학) 22 모의

[문항 1] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(문제 1, 문제 2)에 답하십시오. (30점)

(ㄱ) 다음 조건을 모두 만족시키는 양수 a, b, c 에 대하여 $\frac{2\pi}{a} + \frac{b}{2\pi}$ 의 최솟값을 m 이라 하고,

$\frac{2\pi}{a} + \frac{b}{2\pi} = m$ 인 a, b 의 값을 각각 α, β 라 하자.

(i) 함수 $y = c \sin(ax) + b$ 의 최댓값은 9이다.

(ii) 함수 $y = a \cos(bx) + c$ 의 최댓값은 8이다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 α, β 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \tan(\alpha x - \beta)$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 함수 $f(x)$ 에 대하여 상수 p 는 다음 조건을 만족시킨다.

(i) 직선 $x = p$ 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 한 점근선이다.

(ii) 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 임의의 점근선 $x = q$ 에 대하여 $|p| \leq |q|$ 이다.

문제 1. (15점) 제시문 (ㄱ)의 m 의 값을 구하고 그 근거를 논술하십시오.

문제 2. (15점) 제시문 (ㄷ)의 p 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 2] 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 문제(문제 1, 문제 2)에 답하시오. (30점)

- (ㄱ) [함수의 극한, 좌극한, 우극한] 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 극한값이 L 이면, 함수의 극한의 정의에 의하여 $x=a$ 에서의 좌극한과 우극한이 각각 존재하면서 그 값이 모두 L 과 같다. 또, 그 역도 성립한다. 즉, 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$$

- (ㄴ) [미분계수] 함수 $y=f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a+\Delta x$ 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

이다. 여기서 $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때, 이 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다. 이때 이 극한값을 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 순간변화율 또는 미분계수라고 하며 이것을 기호 $f'(a)$ 로 나타낸다.

- (ㄷ) 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\text{극한값 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(|x|) - f(0)}{x} \text{ 이 존재한다.}$$

- (ㄹ) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (i) 함수 $y=g(|x|)$ 는 모든 실수 x 의 값에서 미분가능하다.
(ii) 함수 $y=g(|x|)$ 는 $x=3$ 에서 극솟값 6을 가진다.

문제 1. (15점) 제시문 (ㄷ)의 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

문제 2. (15점) 제시문 (ㄷ)의 삼차함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(1)$ 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문항 3] 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(문제 1, 문제 2)에 답하십시오. (40점)

(ㄱ) [수학적 귀납법] 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- (i) $n=1$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다.
- (ii) $n=k$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$ 일 때도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(ㄴ) 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 은 다음과 같다.

모든 자연수 m 에 대하여 $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ 이다.

(ㄷ) 모든 실수 c 에 대하여 다음의 부등식을 만족시키는 자연수 n 의 집합을 A 라고 하자.

$$\int_0^1 x^n (1-x)^n \left(1 + 2\sqrt{3}cx + \frac{27}{10}c^2x^2\right) dx > 0$$

문제 1. (20점) 제시문 (ㄴ)의 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하십시오.

문제 2. (20점) 제시문 (ㄷ)의 집합 A 를 구하고 그 과정을 논술하시오.

[문항 1] 대학발표 예시답안

(문제 1) (15점)

양수 a, b, c 에 대해 $y = c \sin(ax) + b$ 와 $y = a \cos(bx) + c$ 의 최댓값이 각각 9, 8이므로 $c + b = 9, a + c = 8$ 이다. 두 식을 연립하면 $b = a + 1$ 이고, $\frac{2\pi}{a} + \frac{b}{2\pi} = \frac{2\pi}{a} + \frac{a+1}{2\pi} = \frac{2\pi}{a} + \frac{a}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}$ 이다. (…5점)

한편, $a > 0$ 이므로 절대부등식에 의해 $\frac{2\pi}{a} + \frac{b}{2\pi} = \frac{2\pi}{a} + \frac{a}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \geq 2\sqrt{\frac{2\pi}{a} \cdot \frac{a}{2\pi}} + \frac{1}{2\pi} = 2 + \frac{1}{2\pi}$ 이고, $\frac{2\pi}{a} = \frac{a}{2\pi}$ 일 때, 등호가 성립한다. 즉, $a = 2\pi$ 일 때 최솟값을 가지고, 이 때 $b = 2\pi + 1 > 0, c = 8 - a = 8 - 2\pi > 0$ 이므로 $m = 2 + \frac{1}{2\pi}, \alpha = 2\pi, \beta = 2\pi + 1$ 이다. (…10점)

(문제 2) (15점)

문제 1에 의해 $\alpha = 2\pi, \beta = 2\pi + 1$ 이므로 $y = \tan(\alpha x - \beta) = \tan(2\pi x - 2\pi - 1)$ 의 점근선은 $x = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$ (n 은 정수)이다.

(…5점)

한편, $n \geq 0$ 일 때 $\frac{1}{2}n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} > 0$ 이고, $n \leq -1$ 일 때 $\frac{1}{2}n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \leq -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} < 0$ 이고, $\left| \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \right| > \left| -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \right|$ 이므로 $p = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$ 이다. (…10점)

[문항 2] 대학발표 예시답안

(문제 1) (15점)

극한값 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(|x|) - f(0)}{x}$ 이 존재하므로

제시문 (ㄱ)에 의해 좌극한 $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(|x|) - f(0)}{x}$ 과 우극한 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(|x|) - f(0)}{x}$ 이 모두 존재하고, 그 값은 같다. 이때

좌극한은 $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(|x|) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(-x) - f(0)}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(-x) - f(0)}{-x}$ 이고,

우극한은 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(|x|) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 이다. (…5점)

그런데 $f(x)$ 가 다항함수이므로 극한값 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 가 존재하고 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 이다.

따라서 좌극한은

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(|x|) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(-x) - f(0)}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(-x) - f(0)}{-x} = -f'(0)$$

이고, 우극한은

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(|x|) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

이다. (…5점)

그러므로 $-f'(0) = f'(0)$ 이다. 즉, $f'(0) = 0$ 이다. (…5점)

(문제 2) (15점)

함수 $y = g(|x|)$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능하므로 극한값 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(|x|) - g(0)}{x}$ 가 존재한다. 따라서, (문제 1)에 의해 $g'(0) = 0$ 이다.

그런데, $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $g'(x) = 3x^2 + ax$ 이다. 즉, $g(x) = x^3 + \frac{a}{2}x^2 + g(0)$ 이다. (…5점)

함수 $y = g(|x|)$ 가 $x = 3$ 에서 극솟값을 가지고 $x > 0$ 일 때 $g(|x|) = g(x)$ 이므로 함수 $y = g(x)$ 도 $x = 3$ 에서 극솟값을 가진다.

따라서 $g'(3) = 0$ 이고 $g(3) = 6$ 이다. $g'(3) = 0$ 이므로 $a = -9$ 이다. 따라서 $g(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + g(0)$ 이고,

$$g(3) = 27\left(1 - \frac{3}{2}\right) + g(0) = -\frac{27}{2} + g(0) = 6 \text{ 이므로 } g(0) = \frac{39}{2} \text{ 이다.} \quad (\cdots 5 \text{점})$$

$$\text{따라서 } g(1) = 1 - \frac{9}{2} + \frac{39}{2} = 16 \text{ 이다.} \quad (\cdots 5 \text{점})$$

[문항 3] 대학발표 예시답안

(문제 1) (20점)

(i) $n = 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^m (1-x) dx &= \int_0^1 x^m dx - \int_0^1 x^{m+1} dx \\ &= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} = \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m! \cdot 1!}{(m+2)!} \text{ 이므로 } p(n) \text{ 은 성립한다.} \end{aligned} \quad (\cdots 6 \text{점})$$

(ii) $n = k$ 일 때, $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^m (1-x)^{k+1} dx &= \int_0^1 x^m (1-x)^k (1-x) dx = \int_0^1 x^m (1-x)^k dx - \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^k dx \\ &= \frac{m! \cdot k!}{(m+k+2)!} (m+k+2-m-1) = \frac{m! \cdot (k+1)!}{(m+k+2)!} \text{ 이므로 } n = k+1 \text{ 일 때도 성립한다.} \end{aligned}$$

따라서, 모든 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 은 성립한다. ($\cdots 14$ 점)

(문제 2) (20점)

제시문 (ㄴ)의 적분식을 이용하여 제시문 (ㄷ)의 적분을 계산하면,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n (1-x)^n \left(1 + 2\sqrt{3}cx + \frac{27}{10}c^2x^2\right) dx &= \int_0^1 x^n (1-x)^n dx + 2\sqrt{3}c \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^n dx + \frac{27}{10}c^2 \int_0^1 x^{n+2} (1-x)^n dx \\ &= \frac{n! \cdot n!}{(2n+1)!} + 2\sqrt{3} \times \frac{(n+1)! \cdot n!}{(2n+2)!} \times c + \frac{27}{10} \times \frac{(n+2)! \cdot n!}{(2n+3)!} \times c^2 \\ &= \frac{n! \cdot n!}{(2n+1)! \cdot (2n+3)} \times \left\{2n+3 + (2n+3)\sqrt{3}c + \frac{27}{20}(n+2)c^2\right\} \text{ 을 얻는다.} \end{aligned} \quad (\cdots 8 \text{점})$$

따라서 제시문 (ㄷ)의 부등식은 위 괄호 안의 식, 즉 c 에 대한 이차식이 양수이어야 한다는 것과 동치이다. c^2 의 계수

$$\begin{aligned} \frac{27}{20}(n+2) \text{ 가 양수이므로, 판별식이 음수가 되어야 한다. 판별식은 } 3(2n+3)^2 - \frac{27}{5}(2n+3)(n+2) \\ = \frac{2n+3}{5} \{15(2n+3) - 27(n+2)\} = \frac{2n+3}{5}(3n-9) \text{ 이므로, } \frac{2n+3}{5}(3n-9) < 0 \text{ 이기 위해서는 } n < 3 \text{ 이 성립해야 한다.} \end{aligned} \quad (\cdots 8 \text{점})$$

따라서 제시문 (ㄷ)의 집합 A 는 $\{1, 2\}$ 이다. ($\cdots 4$ 점)