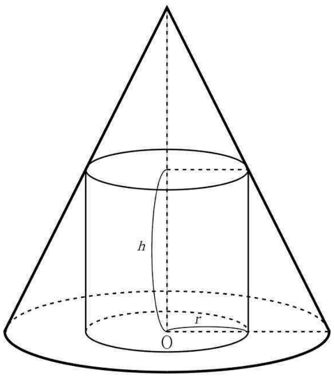
중앙대학교 24 수시 자연계열1

[문제1] 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

- 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 10인 원뿔이 있다.
- 주머니 A에는 $1, 2, 3$의 숫자가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 $1, 2$의 숫자가 하나씩 적혀 있는 2개의 공이 들어 있다.
- 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수이면 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고, 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낸다. 3의 배수가 아니면 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내고, 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.
- 주머니 A와 B에서 꺼낸 공에 적힌 숫자들의 합을 k라 하자. 이때 반지름의 길이가 $k-3$이고 원뿔에 내접하는 원기둥의 부피를 점수로 한다.
- 다음은 원뿔에 내접하고, 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원기둥을 나타낸 것이다.



시행의 결과로 얻은 점수의 기댓값을 구하시오. [20점]

[문제2] 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

- $a>0$, $a \neq 1$, $N>0$일 때, $a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$이다. 그리고 $\log_a N^k = k\log_a N$이다. (단, k는 실수)
- $a>0$, $a \neq 1$, $b>0$, $c>0$, $c \neq 1$일 때, $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$이다.
- 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 다음 식이 성립한다.
  $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \quad \left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$
- $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ (단, $\tan\alpha\tan\beta \neq -1$)

(문제2-1) 다음 식의 값을 구하시오. [10점]

$$\sum_{k=2}^{9}\left(k^{\frac{k\ln 2}{\ln k}} - 2^{\frac{2\ln k}{\ln 2}}\right)$$

(문제2-2) 좌표평면에서 직선 $x=1$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{A}(1, y_1)$과 x축 위를 움직이는 점 $\mathrm{B}(x_1, 0)$의 시각 t에서의 위치는 두 함수 $x_1 = f(t)$, $y_1 = g(t)$로 나타내어질 수 있다. 두 점 $\mathrm{A}(1, g(t))$, $\mathrm{B}(f(t), 0)$은 시각 $t=0$일 때 $(1, 0)$에서 출발한 후, $0 < t \le \frac{\pi}{4}$일 때 원점 O에 대하여 $\angle\mathrm{AOB} = t$이고 $\angle\mathrm{OAB} = \frac{2\pi}{3}$를 만족하며 움직인다고 하자. 이때, 극한값

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\pi k}{6n}\right)$를 구하시오. (단, $x_1 \ge 1$, $y_1 \ge 0$이다.) [15점]

[문제3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

● 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $S=\int_a^b |f(x)|dx$이다.

● 미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(x)=\alpha$, $g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 α와 β를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt$$

● 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

● $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ (단, $\tan\alpha\tan\beta\neq 1$)

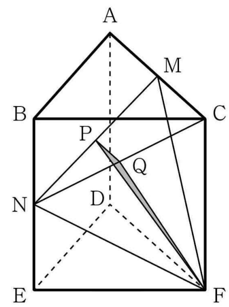
(문제3-1) $x\geq 0$에서 정의된 곡선 $y=\dfrac{x}{x^2+1}\left(\{\ln(x^2+1)\}^2-6\ln(x^2+1)+5\right)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [10점]

(문제3-2) 좌표평면 위에 점 $\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0)$이 있다. 구간 $-1\leq x\leq 1$에서 정의된 곡선 $y=\sqrt{x+2}$ 위의 점 P에 대하여 $\theta=\angle\mathrm{APB}$라 할 때, $\tan^2\theta$의 최댓값을 구하시오. [15점]

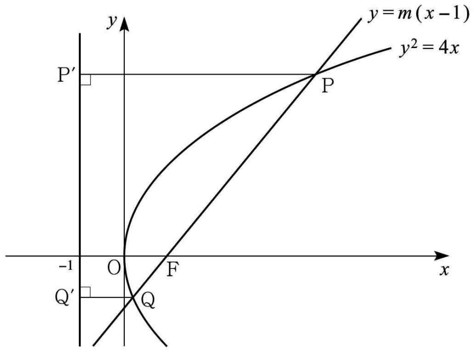
[문제4] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

● 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$이다.
● 삼각형 ABC에서 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 이다.
● 평면 위의 한 점 F와 이 점을 지나지 않는 직선 l이 주어질 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라 한다.
● 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$이고 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$이다.

(문제4-1) 오른쪽 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정삼각기둥에서 두 선분 AC, BE의 중점을 각각 M, N이라 하고, 두 선분 MN, CN의 중점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 PFQ의 외접원의 반지름의 길이를 구하시오. [15점]



(문제4-2) 아래의 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$의 초점 $\mathrm{F}(1,\,0)$을 지나고 $m>0$인 직선 $y=m(x-1)$이 서로 다른 두 점 P, Q에서 포물선과 만난다. 두 점 P, Q에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 P', Q'이라 하자. 사각형 $\mathrm{PP}'\mathrm{Q}'\mathrm{Q}$의 둘레의 길이가 40일 때, 이 사각형의 넓이를 구하시오. [15점]



(예시 답안)

(문제1)

1. 출제 의도

일상생활에서의 수많은 복잡한 상황들을 더 쉽고 잘 이해하기 위해서 그 상황을 확률적 문제로 계량화하는 작업은 아주 중요하다. 특히, 상황에 따른 이산확률변수의 확률분포를 이해하고 그에 따른 기댓값을 계산하는 과정은 확률적 상황 및 성질을 파악하기 위한 중요한 과정이다. 본 문제에서는 주어진 상황에서 확률을 계산하고, 상황에 맞는 기댓값을 계산해내는 능력을 평가한다.

2. 문항 해설

본 문제는 주머니에서 공을 꺼내서 확률을 결정하고 그에 맞는 점수를 얻은 후 기댓값을 계산하는 과정을 다루고 있다. 발생할 수 있는 모든 경우와 그 확률을 찾아내고, 각 경우에서 발생하는 밑면의 반지름과 높이, 원기둥의 부피를 계산할 수 있어야 한다. 최종적으로 원기둥의 부피의 기댓값을 효율적으로 계산해야 한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1	k의 값, 그때의 확률, 원기둥의 부피를 정확히 계산하면 각 +4점(총 +16점) - k의 값과 그때의 확률을 정확히 계산하면 +2점 - 원기둥의 높이를 정확히 계산하면 +1점 - 원기둥의 부피를 정확히 계산하면 +1점 원기둥의 부피의 기댓값을 정확히 계산하면 +4점	20

4. 예시 답안

(1) 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수일 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 이때 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 적힌 숫자들의 표본공간은 $\{(1,2),\ (1,3),\ (2,3)\}$이고 각 경우가 발생할 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 적힌 숫자들의 표본공간은 $\{1,2\}$이고, 각 경우의 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 예를 들어, 주머니 A에서 꺼낸 공이 $(1,2)$이고, 주머니 B에서 꺼낸 공이 1일 때 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$이고, 공에 적힌 숫자들의 합 k는 4이다.

(2) 주사위의 눈의 수가 3의 배수가 아닐 확률은 $\frac{2}{3}$이다. 이때 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 적힌 숫자들의 표본공간은 $\{1,2,3\}$이고 각 경우의 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 주머니 B에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 적힌 숫자들의 표본공간은 $\{(1,2)\}$이고 그때의 확률은 1이다. 예를 들어, 주머니 A에서 꺼낸 공이 1이고, 주머니 B에서 꺼낸 공이 $(1,2)$일 때 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{9}$이고, 공에 적힌 숫자들의 합 k는 4이다.

(3) 위와 같은 방식으로 얻은 시행의 결과는 다음과 같다.

주사위의 눈의 수	주머니 A에서 꺼낸 공	주머니 B에서 꺼낸 공	k	확률
3의 배수인 경우	$(1,\ 2)$	1	4	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
		2	5	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
	$(1,\ 3)$	1	5	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
		2	6	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
	$(2,\ 3)$	1	6	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
		2	7	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
3의 배수가 아닌 경우	1	$(1,\ 2)$	4	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{9}$
	2		5	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{9}$
	3		6	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{9}$

(4) 반지름의 길이가 $k-3$인 원기둥의 높이는 그림 1에서 도형의 닮음을 이용하면 $(16-2k)$로 계산할 수 있고, 원기둥의 부피는 $(k-3)^2(16-2k)\pi$이다.

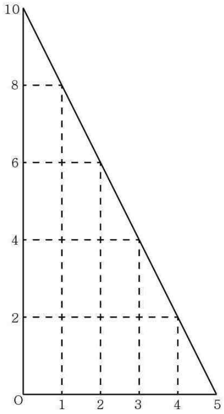


그림 2

(5) $k=4$일 때의 확률은 $\frac{1}{18}+\frac{2}{9}=\frac{5}{18}$이고, 이때 원기둥 반지름의 길이는 1, 높이는 8, 부피는 8π이다.

(6) $k=5$일 때의 확률은 $\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{2}{9}=\frac{6}{18}$이고, 이때 원기둥 반지름의 길이는 2, 높이는 6, 부피는 24π이다.

(7) $k=6$일 때의 확률은 $\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{2}{9}=\frac{6}{18}$이고, 이때 원기둥 반지름의 길이는 3, 높이는 4, 부피는 36이다.

(8) $k=7$일 때의 확률은 $\frac{1}{18}$이고, 이때 원기둥의 반지름 길이는 5, 높이는 2, 부피는 32π이다.

(9) 시행의 결과는 다음과 같고, 이를 이용하여 점수의 기댓값을 계산할 수 있다.

k	확률	원기둥의 밑면의 반지름	원기둥의 높이	원기둥의 부피
4	$\frac{5}{18}$	1	8	8π
5	$\frac{6}{18}$	2	6	24π
6	$\frac{6}{18}$	3	4	36π
7	$\frac{1}{18}$	4	2	32π

$$\text{기댓값}=\left(\frac{5}{18}\times 8\pi\right)+\left(\frac{6}{18}\times 24\pi\right)+\left(\frac{6}{18}\times 36\pi\right)+\left(\frac{1}{18}\times 32\pi\right)$$
$$=\frac{\pi}{18}\{(5\times 8)+(6\times 24)+(6\times 36)+(1\times 32)\}$$
$$=\frac{432}{18}\pi=\frac{216}{9}\pi=24\pi$$

(문제2)

1. 출제 의도

본 문제는 고교 수학에서 중요하게 다루는 로그함수와 삼각함수를 잘 이해하고 있는지 평가하고, 이를 이용하여 수열의 합, 급수의 합과 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

(문제2-1) 로그함수의 성질을 이용하여 주어진 식을 계산하여 수열의 합을 계산할 수 있는지 평가한다.

(문제2-2) 급수의 합과 정적분 사이의 관계를 이해하고 탄젠트 함수의 덧셈정리를 적용하여 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

2. 문항 해설

(문제2-1) 본 문제는 로그함수의 정의와 기본적인 연산을 이용하여 주어진 식을 등비수열의 합과 자연수의 거듭제곱의 합의 형태로 바꾸어 값을 구하는 문제이다.

(문제2-2) 문제에 주어진 조건을 이해하여 좌표평면 위에서 움직이는 두 점 A, B의 시각 t일 때의 위치를 파악할 수 있어야 한다. 이로부터 함수 $f(t)$를 얻고 급수의 극한을 구체적으로 적는다. 이 급수의 극한을 정적분과의 관계를 이용하여 $f(x)$에 대한 정적분을 얻는다.

이 정적분에 대하여 탄젠트 함수의 덧셈정리를 적절히 사용하고, 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 2-1	로그함수의 성질을 이용하여 $k^{\frac{k\ln 2}{\ln k}}=2^k$, $2^{\frac{2\ln k}{\ln 2}}=k^2$ 구하면 +6점 수열의 합공식을 이용하여 정답 736를 얻으면 +4점	10
문제 2-2	주어진 정보로부터 $f(t)=1+(\tan t)\left\{\tan\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$ 구하면 +3점 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 $\frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[1+(\tan x)\left\{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]dx$를 얻으면 +4점 탄젠트 함수의 덧셈정리를 이용하여 $1+(\tan x)\left\{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\dfrac{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\tan x}{\tan\frac{\pi}{6}}$를 얻으면 +4점 정적분을 계산하여 정답 $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{3}{2}$를 얻으면 +4점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

4. 예시 답안

(문제2-1)

로그함수의 성질을 이용하여

$k^{\frac{k\ln 2}{\ln k}}=k^{\frac{\ln 2^k}{\ln k}}=k^{\log_k 2^k}=2^k$, $2^{\frac{2\ln k}{\ln 2}}=2^{\frac{\ln k^2}{\ln 2}}=2^{\log_2 k^2}=k^2$

로 정리한 후, 아래와 같이 등비수열의 합과 자연수의 거듭제곱의 합에 대한 식을 이용하여 답을 구한다.

$$\sum_{k=2}^{9}2^k-\sum_{k=2}^{9}k^2=\sum_{k=2}^{9}2^k-\left(\sum_{k=1}^{9}k^2\right)+1=\frac{4(2^8-1)}{2-1}-\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}+1$$
$$=1020-285+1=736$$

(문제2-2)

우선 주어진 문제의 조건으로부터 $f(t)=1+(\tan t)\left\{\tan\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$를 구한 후, 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 극한값을

$\frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[1+(\tan x)\left\{\left(\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)\right\}\right]dx$로 표현한다.

그리고 제시문에 주어진 탄젠트 함수의 덧셈정리를 이용하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{\pi k}{6n}\right)=\frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\tan x}{\tan\frac{\pi}{6}}dx=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left\{\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\tan x\right\}dx$$

를 얻는다. 치환적분을 하면 $\tan x$의 부정적분이 $-\ln(\cos x)+C$임을 알 수 있는데, 이를 이용하여 답을 얻는다.

$$\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\left\{-\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)+\ln\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)+\ln\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)-\ln(\cos 0)\right\}=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{3}{2}$$

(문제3)

1. 출제 의도

주어진 함수의 그래프를 이해하는지 그리고 정적분의 계산을 잘 수행하는지 평가한다. 문제에 맞는 함수를 구성하고 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

(문제3-1) 주어진 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

(문제3-2) 미분을 이용하여 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 문항 해설

(문제3-1) 주어진 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다. 이를 위해 주어진 함수의 그래프를 이해하고 정적분의 계산을 잘 수행하는지 평가한다.

(문제3-2) 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 함수를 구성하고 미분을 이용하여 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 3-1	교점 $x=0, \sqrt{e-1}, \sqrt{e^5-1}$ 을 구한다. +3점 그래프의 개형을 이해하고 $\int_0^{\sqrt{e-1}}f(x)\,dx-\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^5-1}}f(x)\,dx$ 를 구하면 +3점 치환 적분을 하여 $\frac{13}{2}$ 을 구하면 +4점	10
문제 3-2	$f(t)=\frac{2\sqrt{t+2}}{t^2+t+1}$ 와 $f'(t)=-\frac{3(t^2+3t+1)}{(t^2+t+1)^2\sqrt{t+2}}$ 을 구하면 +8점 $t=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 를 구하고 $t=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ 에서 최댓값을 갖는다는 것을 보이면 +4점 최댓값 $\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$ 을 구하면 +3점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

4. 예시 답안

(문제3-1)

$f(x)=\frac{x}{x^2+1}(\ln(x^2+1)-1)(\ln(x^2+1)-5)$라 하자. $x=0$, $\sqrt{e-1}$, $\sqrt{e^5-1}$에서 $f(x)=0$이다.

$0\le x\le\sqrt{e-1}$에서 $f(x)\ge 0$이고 $\sqrt{e-1}\le x\le\sqrt{e^5-1}$에서 $f(x)\le 0$이므로 구하는 넓이는

$\int_0^{\sqrt{e-1}}f(x)\,dx-\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^5-1}}f(x)\,dx$이다. $t=\ln(x^2+1)$로 치환하여 적분하면

$\frac{1}{2}\int_0^1(t^2-6t+5)\,dt-\frac{1}{2}\int_1^5(t^2-6t+5)\,dt=\frac{7}{6}+\frac{16}{3}=\frac{13}{2}$이다.

(문제3-2)

점 P의 좌표는 $(t,\ \sqrt{t+2})$라 하자.

$\angle\mathrm{PAB}=\alpha$, $\angle\mathrm{PBA}=\beta$라 하면 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{t+2}}{1+t}$, $\tan\beta=\dfrac{\sqrt{t+2}}{1-t}$이다. $\theta=\pi-\alpha-\beta$이므로

$\tan(\theta)=f(t)$라 하면 $f(t)=\dfrac{2\sqrt{t+2}}{t^2+t+1}$이다. 미분하면 $f'(t)=-\dfrac{3(t^2+3t+1)}{(t^2+t+1)^2\sqrt{t+2}}$이다.

$t=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$에서 극값을 갖고 $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}<-1<\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}<1$이므로 $t=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$에서 최댓값을 갖는다.

$\tan^2\theta$의 최댓값은 $\left\{f\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}^2=\dfrac{11+5\sqrt{5}}{2}$이다.

(문제4)

1. 출제 의도

사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 외접원의 반지름을 구하고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 포물선 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.

(문제4-1) 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 외접원의 반지름을 구할 수 있는지를 평가 하는 문제이다.

(문제4-2) 포물선의 뜻을 알고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

2. 문항 해설

(문제4-1) 공간도형의 선과 선, 선과 면의 위치 관계를 이용하여 주어진 삼각형의 선분의 길이와 각의 크기를 구하는 문제이다. 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 외접원의 반지름을 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

(문제4-2) 초점과 준선에 이르는 거리가 같은 점들의 집합이라는 포물선의 뜻을 잘 이해하고 있는지를 평가한다. 이차곡선과 직선이 만나는 점들 사이의 거리를 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 계산할 수 있는지도 평가한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 4-1	$\overline{\mathrm{PF}}=2$를 구하면 +5점 $\overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$을 구하면 +5점 $R=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$를 구하면 +5점	15
문제 4-2	$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{4(m^2+1)}{m^2}$을 구하면 +5점 방정식 $\dfrac{8(m^2+1)}{m^2}+4\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}=40$을 찾으면 +5점 사각형 PP′Q′Q의 넓이 64를 구하면 +5점 (사각형 PP′Q′Q의 넓이 64 이외의 것을 더 찾으면 -2점)	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

4. 예시 답안

(문제4-1)

$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{MC}}=\dfrac{1}{2}$

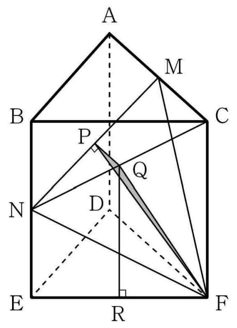
직각삼각형 MBN에서 $\overline{\mathrm{MN}}=\sqrt{\overline{\mathrm{MB}}^2+\overline{\mathrm{BN}}^2}=\sqrt{3+1}=2$이다. 직각삼각형 FCM과 NEF에서

$\overline{\mathrm{MF}}=\sqrt{\overline{\mathrm{MC}}^2+\overline{\mathrm{FC}}^2}=\sqrt{5}$와 $\overline{\mathrm{NF}}=\sqrt{\overline{\mathrm{NE}}^2+\overline{\mathrm{EF}}^2}=\sqrt{5}$이므로 삼각형 FMN은 이등변삼각형이고 삼각형 MPF는 직각삼각형이다. 직각삼각형 MPF에서 $\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{\overline{\mathrm{MF}}^2-\overline{\mathrm{MP}}^2}=2$이다.

점 Q에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 R이라 할 때, $\overline{\mathrm{QR}}=\dfrac{3}{2}$이고 삼각형 QRF는 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{QF}}=\sqrt{\overline{\mathrm{QR}}^2+\overline{\mathrm{RF}}^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$이다.

$\theta = \angle \mathrm{QPF}$라 하면 삼각형 QPF에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta = \dfrac{\frac{1}{4}+4-\frac{13}{4}}{2\times\frac{1}{2}\times 2} = \dfrac{1}{2}$이므로 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다. 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$이므로 $R = \dfrac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{39}}{6}$이다.



(문제4-2)

$y^2 = 4x$에 $y = m(x-1)$을 대입하고 정리하여 얻은 이차방정식 $m^2x^2 - 2(m^2+2)x + m^2 = 0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta = \dfrac{2(m^2+2)}{m^2}$이다.

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{FQ}} = \overline{\mathrm{PP'}} + \overline{\mathrm{QQ'}} = (\alpha+1) + (\beta+1) = \frac{4(m^2+1)}{m^2}$$

점 P에서 직선 $\mathrm{QQ'}$에 내린 수선의 발을 R이라 하고 각 PQR을 θ라 하면,

$\overline{\mathrm{P'Q'}} = \overline{\mathrm{PR}} = \tan\theta\,\overline{\mathrm{QR}} = m\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2 - \overline{\mathrm{PR}}^2} = m\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2 - \overline{\mathrm{P'Q'}}^2}$ 에서

$$\overline{\mathrm{P'Q'}} = \sqrt{\frac{m^2}{m^2+1}}\,\overline{\mathrm{PQ}} = 4\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}$$

사각형 $\mathrm{PP'Q'Q}$의 둘레의 길이$= \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{PP'}} + \overline{\mathrm{QQ'}} + \overline{\mathrm{P'Q'}} = 2\overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{P'Q'}}$

$$= \frac{8(m^2+1)}{m^2} + 4\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}} = 40$$

$r = \sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}$ 라 놓아 얻은 이차방정식 $8r^2 + 4r = 40$에서 $r > 0$이므로

$$r = \sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}} = 2$$

이다. 따라서 $m^2 = \dfrac{1}{3}$이고

사각형 $\mathrm{PP'Q'Q}$의 넓이$= \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{P'Q'}}\cdot(\overline{\mathrm{PP'}} + \overline{\mathrm{QQ'}}) = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{P'Q'}}\cdot\overline{\mathrm{PQ}} = \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 16 = 64$