

내 신 기 출

점
수

학원반

이름

김통영해병수학 476-0903

1. 함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) \ln(1+3x)\} = 6$ 을 만족시킬 때,

$\lim_{x \rightarrow 0} xf(x)$ 의 값은? [4.7점]

- ① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(4^{\ln x}) - f(1)}{x - 1} = \ln 4$ 를 만족시키는 함수 $f(x)$ 에

대하여 $f'(1)$ 의 값은? [4.9점]

- ① -4 ② $-\ln 4$ ③ $-\ln 2$
④ 0 ⑤ 1

3. 실수 전체의 집합에서 정의된 미분 가능한 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(가) 모든 실수 x, y 에 대하여

$$f(x+y) = f(x)f(y) + 4f(x) + 4f(y) + 12$$

(나) $f(\ln 2) = 0, f'(0) = 2$

(다) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2\ln x$

이때 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(\ln 2, f(\ln 2))$ 에서의 접선과
곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(k, g(k))$ 에서의 접선이 이루는
예각의 크기를 θ 라 하면 $\tan \theta = \frac{3}{41}$ 이다. 자연수 k 의

값은? [5.0점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. 삼차함수 $f(x)$ 와 집합 $\{x | x > -1\}$ 에서 정의된 함수

$$g(x) = \begin{cases} 5 & (x = 0) \\ \frac{1}{\ln(x+1)} & (x > -1, x \neq 0) \end{cases} \text{이 다음 조건을}$$

만족시킨다.

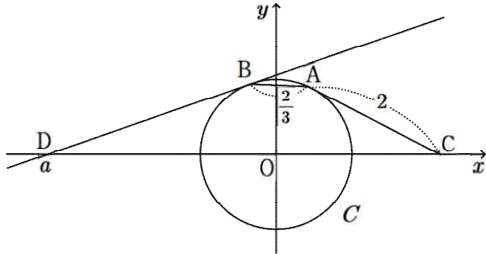
(가) $f(1) = 1$ 이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 2$ 이다.

(나) 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x > -1$ 인 모든 실수 x 에서
연속이다.

$f(3)$ 의 값은? [4.9점]

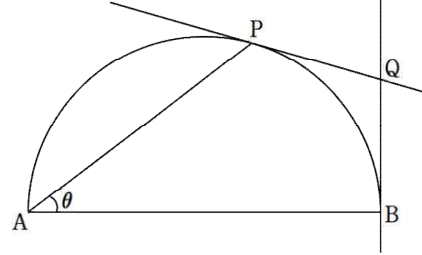
- ① 27 ② 36 ③ 45
④ 54 ⑤ 63

5. 그림과 같이 중심이 원점 O 이고 반지름의 길이가 1인 원 C 위의 두 점 A, B 가 각각 제1사분면과 제2사분면에 있다. 점 $C(\sqrt{5}, 0)$ 에 대하여 $\overline{AC}=2$ 이고 $\overline{AB}=\frac{2}{3}$ 이다. 원 C 위의 점 B 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 $D(a, 0)$ 이라 할 때, $-\frac{\overline{BD}}{a}$ 의 값은? [5.3점]



- ① $\frac{4\sqrt{5}}{15} + \frac{\sqrt{10}}{15}$
 ② $\frac{14\sqrt{5}}{45} + \frac{\sqrt{10}}{15}$
 ③ $\frac{14\sqrt{5}}{45} + \frac{4\sqrt{10}}{45}$
 ④ $\frac{14\sqrt{5}}{45} + \frac{\sqrt{10}}{9}$
 ⑤ $\frac{5\sqrt{5}}{9} + \frac{\sqrt{10}}{9}$

6. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원 위에 점 P 가 있다. 점 B 를 지나고 선분 AB 에 수직인 직선이 점 P 에서 이 반원에 접하는 직선과 만나는 점을 Q 라 하자. $\angle PAB = \theta$ 라 하고 직선 PQ 와 직선 BQ , 호 PB 에 동시에 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 이다.) [5.6점]

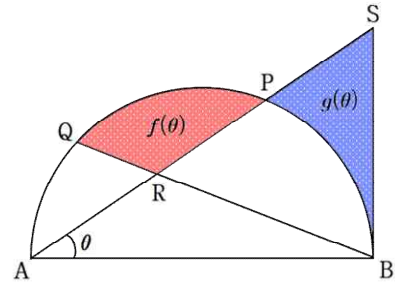


- ① $\frac{\pi}{8}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{2}$
 ④ π ⑤ 2π

7. 좌표평면에서 직선 $x - 4y + 1 = 0$ 과 이루는 예각의 크기가 각각 $\frac{\pi}{4}$ 인 두 직선 l_1, l_2 가 있다. 이 두 직선 l_1, l_2 의 기울기를 각각 m_1, m_2 라 할 때, $m_1 + m_2$ 의 값은? [4.6점]

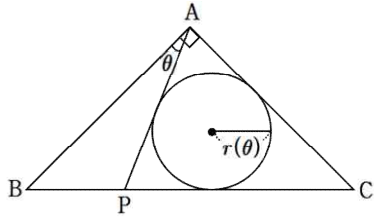
- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{11}{15}$ ③ $\frac{16}{15}$
 ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{26}{15}$

8. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 PB와 호 PQ의 길이가 같도록 잡을 때, 두 선분 AP, BQ가 만나는 점을 R라 하고 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 S라 하자. $\angle BAP = \theta$ 라 할 때, 두 선분 PR, QR와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 PS, BS와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{f(\theta) + g(\theta)}{BR^3}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4.9점]



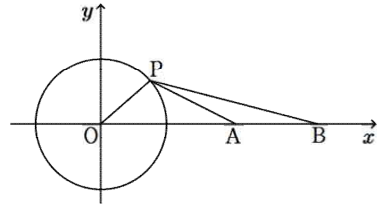
- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[논술형 1] 그림과 같이 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ 이고 $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ 인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 변 BC 위의 점 P에 대하여 $\angle PAB = \theta$ 일 때, 삼각형 APC의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{2} - \theta}$ 의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.
 (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [10.0점]



[논술형 2] 그림과 같이 좌표평면에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위에 점 P가 있다. 두 점 A(2, 0), B(3, 0)에 대하여 $\theta = \angle AOP$ 일 때, 다음 두 물음에 답하시오.

(단, $0 < \angle AOP < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [총 8.0점]



(1) $\cos(\angle BAP)$ 를 θ 에 관한 식으로 나타내시오. [4.0점]

(2) 삼각형 APB의 외접원의 반지름을 R 이라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \theta R$ 의 값을 구하시오. [4.0점]

삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned}\cos\beta &= \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2}{2 \times \overline{OA} \times \overline{OB}} \\ &= \frac{1^2 + 1^2 - \frac{4}{9}}{2 \times 1 \times 1} \\ &= \frac{7}{9}\end{aligned}$$

이고, β 는 예각이므로 $\sin\beta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ 이다.

$$-\frac{\overline{BD}}{a} = \frac{\overline{BD}}{\overline{OD}} \text{ 이고,}$$

$$\begin{aligned}\angle BDO &= \pi - \frac{\pi}{2} - \{\pi - (\alpha + \beta)\} \\ &= (\alpha + \beta) - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

이므로

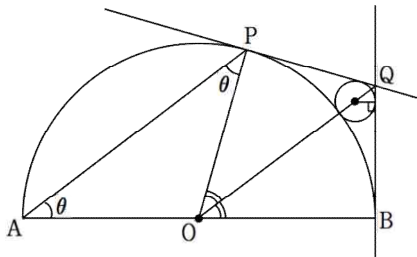
$$\begin{aligned}-\frac{\overline{BD}}{a} &= \frac{\overline{BD}}{\overline{OD}} \\ &= \cos(\angle BDO) \\ &= \cos\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin(\alpha + \beta) \\ &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{7}{9} + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{4\sqrt{2}}{9} \\ &= \frac{14\sqrt{5}}{45} + \frac{4\sqrt{10}}{45}\end{aligned}$$

6) ②

[풀이]

반원의 중심을 O라 하자.

$\angle PAB = \theta$ 이므로 $\angle OPA = \theta$ 이고 $\angle POB = 2\theta$ 이다.



이때 직선 PQ와 직선 BQ, 호 PB에 동시에 접하는 원을 C라고 하고

C의 원의 중심을 O', 반지름의 길이를 r이라고 하자.

세 점 O, O', Q는 한 직선 위에 놓이고 삼각형 OPQ와 삼각형 OBQ는 합동이다.

$\angle QOB = \theta$ 이고 $\overline{OB} = 2$ 이므로 $\overline{OQ} = 2\sec\theta$

O'에서 직선 BQ에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$$\overline{OO'} = 2 + r \text{ 이고 } \overline{O'H} = r,$$

$$\overline{O'Q} = \overline{OQ} - \overline{OO'} = 2\sec\theta - (r + 2)$$

직각삼각형 O'QH에서

$$\overline{O'H} = \overline{O'Q} \cos\theta \text{ 이므로}$$

$$r = 2 - (r + 2) \cos\theta$$

$$\therefore r = \frac{2(1 - \cos\theta)}{1 + \cos\theta}$$

$$S(\theta) = \pi r^2$$

$$= \pi \left\{ \frac{2(1 - \cos\theta)}{1 + \cos\theta} \right\}^2$$

$$= 4\pi \frac{(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos\theta)^2}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{4\pi \frac{(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos\theta)^2}}{\theta^4}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{4\pi}{(1 + \cos\theta)^2} \times \left(\frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{4\pi}{2^2} \times \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

7) ③

[풀이]

직선 $x - 4y + 1 = 0$, 즉 기울기가 $\frac{1}{4}$ 인 직선과 예각의 크기가

$$\frac{\pi}{4} \text{인 직선의 기울기를 } m \text{이라 하면 } \tan \frac{\pi}{4} = \left| \frac{m - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}m} \right| \text{를}$$

만족해야 한다.

$$\left| m - \frac{1}{4} \right| = \left| 1 + \frac{1}{4}m \right|$$

$$m - \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}m \text{ 또는 } m - \frac{1}{4} = -1 - \frac{1}{4}m$$

$$m = \frac{5}{3} \text{ 또는 } m = -\frac{3}{5} \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned}\therefore m_1 + m_2 &= \frac{5}{3} + \left(-\frac{3}{5} \right) \\ &= \frac{16}{15}\end{aligned}$$

[참고]

두 직선 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ 이 이루는 예각의 크기를

$$\theta \text{라 할 때 } \tan\theta = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| \text{이 성립한다.}$$

8) ③

[풀이]

$\overline{AB}$ 의 중점을 O라 하자.

$$\angle BOP = 2\theta, \angle BOQ = 4\theta$$

$$\angle APB = \frac{\pi}{2}, \angle PBS = \theta$$

$$\widehat{PB} = \widehat{PQ} \text{에서 } \angle PBQ = \theta \text{이다.}$$

따라서 $\triangle BRS$ 는 $\overline{BR} = \overline{BS} = 2\tan\theta$ 인 이등변삼각형이다.

$$\triangle BRS = \frac{1}{2} \times (2\tan\theta)^2 \times \sin 2\theta$$

$$= 2\tan^2\theta \sin 2\theta$$

$$\triangle BPR = \triangle BPS$$

$$= \frac{1}{2} \triangle BRS$$

$$= \tan^2 \theta \sin 2\theta$$

$\widehat{BQ}$ 와 $\widehat{BQ}$ 로 둘러싸인 활꼴의 넓이와 $\widehat{BP}$ 와 $\widehat{BP}$ 로 둘러싸인 활꼴의 넓이를 각각 S , T 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 4\theta - \frac{1}{2} \times \sin 4\theta$$

$$= 2\theta - \frac{1}{2} \sin 4\theta$$

$$T = \frac{1}{2} \times 2\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$= \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

이다.

$$f(\theta) + g(\theta) = S - 2T$$

$$= \left(2\theta - \frac{1}{2} \sin 4\theta\right) - 2 \times \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)$$

$$= \sin 2\theta - \frac{1}{2} \sin 4\theta$$

$$= \sin 2\theta - \frac{1}{2} \times 2 \sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$= \sin 2\theta - \sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$= \sin 2\theta (1 - \cos 2\theta)$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{f(\theta) + g(\theta)}{\widehat{BR}^3} = \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2\theta (1 - \cos 2\theta)}{8 \tan^3 \theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2\theta (1 - \cos 2\theta) (1 + \cos 2\theta)}{8 \tan^3 \theta (1 + \cos 2\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2\theta (1 - \cos^2 2\theta)}{8 \tan^3 \theta (1 + \cos 2\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin^3 2\theta}{8 \tan^3 \theta (1 + \cos 2\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \left\{ \frac{1}{8} \times \frac{\sin^3 2\theta}{\theta^3} \times \frac{\theta^3}{\tan^3 \theta} \times \frac{1}{(1 + \cos 2\theta)} \right\}$$

$$= \frac{1}{8} \times 2^3 \times 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

9) [논술형 3] $\frac{1}{2}$

[풀이]

직각이등변 ABC 에서 $\angle B = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\angle APC = \frac{\pi}{4} + \theta, \angle PAC = \frac{\pi}{2} - \theta, \angle ACP = \frac{\pi}{4}$$

이다.

삼각형 APC 에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle APC)} = \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAP)} = \frac{\overline{AP}}{\sin(\angle ACP)} \text{ 이므로}$$

$$\overline{CP} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}$$

$$\overline{AP} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}$$

이다.

$\triangle APC$ 의 넓이

$$= \frac{1}{2} r(\theta) (\overline{AP} + \overline{CP} + \overline{AC}) = \frac{1}{2} \overline{AP} \times \overline{AC} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$r(\theta) = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \sqrt{2} \cos \theta + 1}$$

$\frac{\pi}{2} - \theta = t$ 라 하면 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이고,

$$\theta = \frac{\pi}{2} - t \text{ 이므로 } \cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi - t\right) \text{ 이다.}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{2} - \theta} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{r\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{t \times \left\{ \sqrt{2} \sin\left(\frac{3}{4}\pi - t\right) + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 1 \right\}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t \left\{ \sqrt{2} \sin\left(\frac{3}{4}\pi - t\right) + \sqrt{2} \sin t + 1 \right\}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\sin t}{t} \times \frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(\frac{3}{4}\pi - t\right) + \sqrt{2} \sin t + 1} \right\}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

10) [논술형 1]

$$(1) \cos(\angle BAP) = \frac{\cos \theta - 2}{\sqrt{5 - 4\cos \theta}}$$

(2) 1

[풀이]

(1) $\angle AOP = \theta$ 이므로 점 P 의 좌표를 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 라 하자.

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{(\cos \theta - 2)^2 + \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta - 4\cos \theta + 4 + \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{5 - 4\cos \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{BP} &= \sqrt{(\cos \theta - 3)^2 + \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta - 6\cos \theta + 9 + \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{10 - 6\cos \theta} \end{aligned}$$

삼각형 ABP 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos(\angle BAP) &= \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AP}^2 - \overline{BP}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{AP}} \\ &= \frac{1^2 + (\sqrt{5 - 4\cos \theta})^2 - (\sqrt{10 - 6\cos \theta})^2}{2 \times 1 \times \sqrt{5 - 4\cos \theta}} \\ &= \frac{1 + 5 - 4\cos \theta - 10 + 6\cos \theta}{2 \sqrt{5 - 4\cos \theta}} \\ &= \frac{2\cos \theta - 4}{2 \sqrt{5 - 4\cos \theta}} \\ &= \frac{\cos \theta - 2}{\sqrt{5 - 4\cos \theta}} \end{aligned}$$

$$(2) \sin(\angle BAP) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle BAP)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{1 - \left(\frac{\cos\theta - 2}{\sqrt{5 - 4\cos\theta}} \right)^2} \\
&= \sqrt{1 - \frac{\cos^2\theta - 4\cos\theta + 4}{5 - 4\cos\theta}} \\
&= \sqrt{\frac{5 - 4\cos\theta - \cos^2\theta + 4\cos\theta - 4}{5 - 4\cos\theta}} \\
&= \sqrt{\frac{1 - \cos^2\theta}{5 - 4\cos\theta}} \\
&= \frac{\sin\theta}{\sqrt{5 - 4\cos\theta}}
\end{aligned}$$

삼각형 ABP에서 사인법칙에 의해

$$\begin{aligned}
2R &= \frac{\overline{BP}}{\sin(\angle BAP)} \\
&= \frac{\sqrt{10 - 6\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\sqrt{5 - 4\cos\theta}}} \\
&= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{(5 - 3\cos\theta)(5 - 4\cos\theta)}}{\sin\theta} \\
\therefore R &= \frac{\sqrt{(5 - 3\cos\theta)(5 - 4\cos\theta)}}{\sqrt{2}\sin\theta} \\
\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \theta R &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta \sqrt{(5 - 3\cos\theta)(5 - 4\cos\theta)}}{\sqrt{2}\sin\theta} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\theta}{\sin\theta} \times \frac{\sqrt{(5 - 3\cos\theta)(5 - 4\cos\theta)}}{\sqrt{2}} \right\} \\
&= 1 \times \frac{\sqrt{2 \times 1}}{\sqrt{2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$