

한양대학교 20 수시 오전

[문제1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

반지름의 길이가 1인 구 S 의 중심으로부터 거리가 $a(a > 1)$ 인 직선 l 이 있다. 직선 l 과 구 S 의 중심을 포함하는 평면을 P 라 하고 P 로부터 가장 멀리 떨어진 S 의 한 점을 Q 라 하자. l 을 포함하면서 P 와 이루는 각의 크기가 θ 인 평면 중 Q 에 가까운 것을 P_θ 라 할 때, P_θ 가 S 를 만나 이루는 원을 C_θ 라 하자. P_{θ_0} 이 S 에 접하는 평면이면, $0 \leq \theta \leq \theta_0$ 인 모든 θ 에 대해 P_θ 는 S 와 만난다.

(문제1) $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때, 원 C_θ 의 넓이를 구하시오.

(문제2) 원 C_θ 의 넓이를 $A(\theta)$ 라 하고 $t = \tan \theta$ 로 놓을 때,

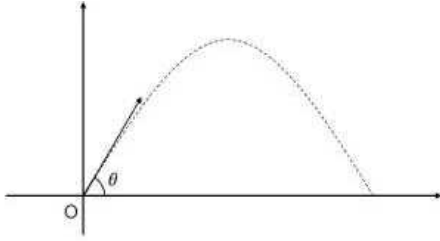
$$\int_0^{\tan \theta_0} A(\theta) dt$$

의 값을 θ_0 에 대한 식으로 나타내시오. 단, $A(\theta_0) = 0$ 으로 한다.

(문제3) 평면 P_{θ_0} 이 구 S 와 만나는 점과 원 $C_\theta (0 \leq \theta < \theta_0)$ 의 중심이 이루는 곡선의 길이를 구하시오.

[문제2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

중력가속도는 $10m/s^2$ 이고 공기저항은 없다고 가정한다. 이때, 다음 그림과 같이 지면과 이루는 각도가 θ 가 되도록 지면에서 v_0 의 속력으로 공을 던지면 t 초 후의 위치는 $((v_0 \cos \theta)t, (v_0 \sin \theta)t - 5t^2)$ 이 된다.



(문제1) 야간에 높이가 $50m$ 인 가로등이 켜져 있고, 가로등으로부터 $30m$ 떨어진 지면에서 공을 수직으로 던져서 나타나는 공의 그림자를 관찰한다. 지면에서 공을 수직 방향으로 $20m/s$ 의 속력으로 던졌을 때, 3초 후 그림자의 진행 방향과 속력을 구하시오. (단, 가로등의 빛은 한 점에서 모든 방향으로 나간다.)

(문제2) 태양광이 지면과 이루는 각도가 $\frac{\pi}{6}$ 일 때, 태양을 등지고 지면과 이루는 각도가 $\frac{\pi}{3}$ 가 되도록 $20m/s$ 의 속력으로 공을 던지고 공의 그림자를 관찰한다. 그림자의 속력이 $10m/s$ 가 될 때, 공의 높이를 구하시오. (단, 태양광은 평행하게 진행한다.)

(문제3) 야간에 높이가 $50m$ 인 가로등이 켜져 있고, 가로등 바로 아래에서 지면과 이루는 각도가 $\frac{\pi}{3}$ 가 되도록 $20m/s$ 의 속력으로 공을 던지고 공의 그림자를 관찰한다. 공의 속력이 $\frac{10\sqrt{3}}{3}m/s$ 가 될 때, 그림자의 속력을 구하시오. (단, 가로등의 빛은 한 점에서 모든 방향으로 나간다.)

(논제 해결)

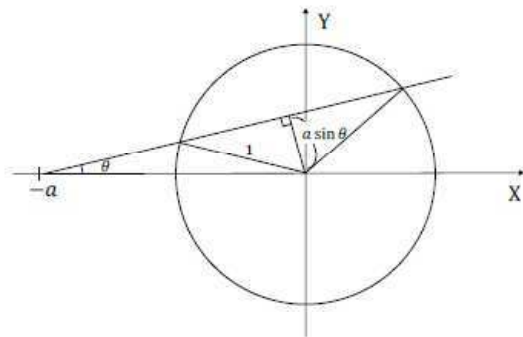
(문제1)

2. 종합평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	원의 넓이를 올바르게 구했는가?	20
2	40	적분값을 올바르게 구했는가?	20
		계산의 과정이 논리의 비약 없이 충분히 설명되었는가?	20
3	40	곡선의 길이 값을 올바르게 구했는가?	20
		계산의 과정이 논리의 비약 없이 충분히 설명되었는가?	20

4. 예시 답안

S 의 중심점을 $(0, 0, 0)$ 이라 하고, L 을 $L: x = -a, y = 0$ 인 직선으로 두면 C_g 의 중심점은 XY -평면위에 있다.



$t = \tan \theta$ 라 하면

$$\begin{cases} y = t(x+a) & -\star \\ x^2 + y^2 = 1 & -\star\star \end{cases}$$

$$x^2 + t^2(x+a)^2 = 1 \quad (t^2+1)x^2 + 2at^2x + (t^2a^2-1) = 0$$

직선 $\star$, 원 $\star\star$ 의 교점의 X 좌표를 α_1, α_2 라 하면,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{2at^2}{t^2+1} \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{t^2a^2-1}{t^2+1}$$

$$\text{중심점의 } X \text{좌표} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = -\frac{at^2}{t^2+1} \quad Y \text{좌표} = t\left(-\frac{at^2}{t^2+1} + a\right) = \frac{at}{t^2+1}$$

위 그림에서 보면, $(\text{반지름})^2 = 1^2 - (a \sin \theta)^2$

(논제1)

$$\text{넓이} = \pi(1 - a^2 \sin^2 \theta), \quad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 이면, 원의 면적} = \pi(1 - \frac{a^2}{4})$$

(논제2)

$$dt = \sec^2 \theta d\theta, \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \text{ 이므로}$$

$$\text{주어진 식} = \pi \int_0^{\theta_0} (1 - a^2 \sin^2 \theta) \sec^2 \theta d\theta = \pi \int_0^{\theta_0} \sec^2 \theta - a^2 \tan^2 \theta d\theta = \pi \int_0^{\theta_0} (1 - a^2) \sec^2 \theta + a^2 d\theta = \pi((1 - a^2) \tan \theta_0 + a^2 \theta_0)$$

$$\tan \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \text{ 이므로, 적분값은 } \pi \frac{\theta_0 \tan^2 \theta_0 - \tan \theta_0 + \theta_0}{\tan^2 \theta_0}$$

(문제3)

$$\begin{cases} x(\theta) = -\frac{a \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} = -\frac{a \tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} = -a \sin^2 \theta \\ y(\theta) = \frac{a \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = a \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= -2a \sin \theta \cos \theta \\ y'(\theta) &= a \cos^2 \theta - a \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\{x'(\theta)\}^2 + \{y'(\theta)\}^2 = 4a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + a^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 = a^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 = a^2$$

$$\text{곡선의 길이} = \int_0^{\theta_0} a \, d\theta = a\theta_0$$

(문제2)

4. 예시 답안

(문제1)

수직으로 던진 공의 t 초 후의 공의 높이를 $h(t)$ 라 하면 제시문에 의해

$$h(t) = 20t - 5t^2, \quad h'(t) = 20 - 10t \text{ 이다.}$$

$h(t) = -5(t-2)^2 + 20 < 50$ 이므로 항상 그림자가 생긴다.

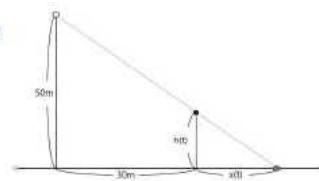
삼각형의 닮음을 이용하면 $\frac{h(t)}{x(t)} = \frac{50}{x(t)+30}$ 이고

$$h(t)(x(t)+30) = 50x(t) \text{ 이므로 } x(t) = \frac{30h(t)}{50-h(t)} \text{ 이다.}$$

$$\text{그림자의 속도는 } x'(t) = \frac{30h'(t)(50-h(t)) + 30h(t)h'(t)}{(50-h(t))^2} = \frac{1500h'(t)}{(50-h(t))^2} \text{ 이다.}$$

$$h(3) = 15, \quad h'(3) = -10 \text{ 이므로 } x'(3) = \frac{30 \times 50 \times (-10)}{35^2} = -\frac{600}{49} \text{ 이다.}$$

따라서 그림자는 가로등을 향해 $\frac{600}{49}$ m/s의 속력을 가진다.



(문제2)

제시문에 의해 t 초 후 공의 위치는 $(x(t), y(t)) = (10t, 10\sqrt{3}t - 5t^2)$ 이다.

그림자의 위치를 $z(t)$ 라고 하면 $z(t) = x(t) + p(t)$ 인데, $\frac{y(t)}{p(t)} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로

로 $z(t) = x(t) + \sqrt{3}y(t)$ 이다.

그림자의 속도는 $z'(t) = x'(t) + \sqrt{3}y'(t) = 10 + \sqrt{3}(10\sqrt{3} - 10t) = 40 - 10\sqrt{3}t$ 이다.

그림자의 속력이 10이 되기 위해서는

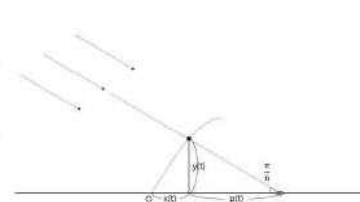
$$|z'(t)| = |40 - 10\sqrt{3}t| = 10 \text{ 이므로, } 40 - 10\sqrt{3}t = 10 \text{ 또는 } 40 - 10\sqrt{3}t = -10,$$

$$\text{즉, } t = \sqrt{3} \text{ 또는 } t = \frac{5}{\sqrt{3}} \text{ 일 때 그림자의 속력이 10이 된다.}$$

이때, 높이를 구하면

$$y(\sqrt{3}) = 10\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 5 \times 3 = 30 - 15 = 15,$$

$$y\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) = 10\sqrt{3} \times \frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{5 \times 5^2}{3} = 50 - \frac{125}{3} = \frac{25}{3} \text{ 이다.}$$



(문제3)

제시문에 의해 t 초 후 공의 위치는 $(x(t), y(t)) = (10t, 10\sqrt{3}t - 5t^2)$ 이다.

$y(t) = -5(t - \sqrt{3})^2 + 15 < 50$ 이므로 항상 그림자가 생긴다.

$x'(t) = 10, y'(t) = 10\sqrt{3} - 10t$ 이므로, 공의 속력을 $v(t)$ 라 하면

$$|v(t)|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 10^2 + (10\sqrt{3} - 10t)^2 = 10^2(t^2 - 2\sqrt{3}t + 4)$$

$v(t) = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ 이 되는 시간을 구하면

$$10^2(t^2 - 2\sqrt{3}t + 4) = \frac{20^2}{3} \Rightarrow t^2 - 2\sqrt{3}t + 4 = \frac{4}{3} \Rightarrow t = \sqrt{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$t_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}, t_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 이라 하자.}$$

그림자의 위치를 $z(t)$ 라고 하면 $z(t) = x(t) + p(t)$ 인데, 삼각형의 닮음에 의해 $\frac{y(t)}{p(t)} = \frac{50}{x(t) + p(t)}$ 이다.

$y(t)(x(t) + p(t)) = 50p(t)$ 이므로 $p(t) = \frac{x(t)y(t)}{50 - y(t)}$ 이다. 따라서, $z(t) = \frac{50x(t)}{50 - y(t)}$ 이고,

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{50x'(t)(50 - y(t)) + 50x(t)y'(t)}{(50 - y(t))^2} \\ &= \frac{50^2x'(t) - 50x'(t)y(t) + 50x(t)y'(t)}{(50 - y(t))^2} \end{aligned}$$

이다.

$$x(t_1) = \frac{20\sqrt{3}}{3}, y(t_1) = 20 - 5 \times \frac{4}{3} = \frac{40}{3}, x'(t_1) = 10, y'(t_1) = 10\sqrt{3} - \frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ 이고}$$

$$x(t_2) = \frac{40\sqrt{3}}{3}, y(t_2) = 40 - 5 \times \frac{16}{3} = \frac{40}{3}, x'(t_2) = 10, y'(t_2) = 10\sqrt{3} - \frac{40\sqrt{3}}{3} = \frac{-10\sqrt{3}}{3} \text{ 이다.}$$

따라서

$$z'(t_1) = \frac{50^2 \times 10 - 50 \times 10 \times \frac{40}{3} + 50 \times \frac{20\sqrt{3}}{3} \times \frac{10\sqrt{3}}{3}}{(50 - \frac{40}{3})^2} = \frac{3 \times 13 \times 50}{11^2} = \frac{1950}{121} \text{ m/s}$$

$$z'(t_2) = \frac{50^2 \times 10 - 50 \times 10 \times \frac{40}{3} + 50 \times \frac{40\sqrt{3}}{3} \times \frac{-10\sqrt{3}}{3}}{(50 - \frac{40}{3})^2} = \frac{3 \times 7 \times 50}{11^2} = \frac{1050}{121} \text{ m/s}$$

이다.

