중앙대학교 25 수시(자연계열1)

[문제1] 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다. 풀이와 함께 물음에 답하시오.

- ●주머니에 빨간색 공 4개, 파란색 공 3개, 초록색 공 3개가 들어 있다.
- ●서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수의 합이 4 이하이면, 주머니에서 임의로 공 2개를 동시에 꺼낸다. 만일 눈의 수의 합이 5 이상이면, 주머니에서 임의로 공 1개를 꺼낸다.
- ●꺼낸 공 중에서 빨간색 공의 개수를 점수로 얻는다.
- ●꺼낸 공을 모두 주머니에 다시 넣는다.

위 시행을 2회 반복할 때, 얻은 점수의 합이 2 이상일 확률을 구하시오. [20점]

[문제2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

●수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 일반항과 수열의 합의 관계는 다음과 같다.

$$a_1 = S_1,\ a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geq 2)$$

●두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 다음 식이 성립한다.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

[문제2-1] 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음을 만족시킬 때, a_1을 구하시오. [10점]

(가) $S_n = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n - 2 & (n\text{이 짝수인 경우}) \\ 2a_n + 3 & (n\text{이 3 이상인 홀수인 경우}) \end{cases}$

(나) $S_8 = 2025$

[문제2-2] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서

$$f(x) = \begin{cases} -x^2\cos(\pi x) & (-1 \leq x < 0) \\ x^2\cos(\pi x) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = \frac{1}{2}f(x-2) - \frac{3}{2}$을 만족시킨다. 이때, 정적분 $\int_{-4}^{-1} f(x)dx$의 값을 구하시오. [15점]

[문제3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

●점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

●모든 실수 α, β에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

●미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 α와 β를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt$$

[문제3-1] 좌표평면 위에 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 2)$가 있다. 방정식 $y^3-3e^{2x}y+2e^{3x}=0$을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값을 구하시오. (단, $y\geq 0$이다.)
[10점]

[문제3-2] $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}=1$이고 $\angle\mathrm{BAC}=3\mathrm{x}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC위의 점 D를 $\angle\mathrm{BAD}=\mathrm{x}$가 되도록 잡자. 선분 AD의 길이를 $f(x)$라 할 때, 정적분 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin^3 x dx$의 값을 구하시오. [15점]

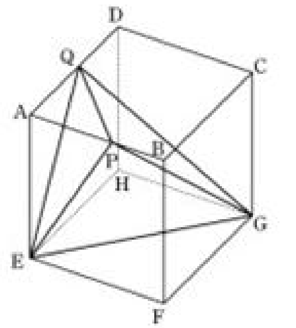
[문제4] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

●평면 α 위에 있지 않은 점 P, 평면 α 위의 점 O, 점 O를 지나지 않는 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여 $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$이면 $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$이다.

●쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$이다.

●쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1 x}{a^2}-\frac{y_1 y}{b^2}=1$이다.

[문제4-1] 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH의 선분 AB, AD 위에 점 P, Q가 각각 놓여 있다. 삼각형 PEG, QEG의 넓이가 각각 $\sqrt{10}$과 3일 때, 삼각형 EPQ의 넓이를 구하시오. [15점]



[문제4-2] 두 초점이 F(c, 0), F′(−c, 0) $(c>0)$인 쌍곡선 $x^2-3y^2=1$ 위의 점 P(a, b) $(a>0,\ b>0)$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 Q, 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선과 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 OQR의 넓이를 x축이 이등분할 때, 점 F와 직선 F′P사이의 거리를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [15점]

(논제 해결)

(문제1)

1. 출제 의도

일상생활에서의 복잡한 상황을 더 쉽게 표현하고 잘 이해하기 위해서, 상황을 확률적 문제로 계량화하는 작업은 아주 중요하다. 특히, 수학적 확률의 개념을 이해하고 독립시행에서의 확률을 계산하는 과정은 확률적 상황 및 성질을 파악하기 위한 중요한 과정이다. 본 문제에서는 주어진 상황에서 사건에 따른 조건부확률을 계산하고, 이를 종합하여 원하는 확률 계산해내는 능력을 평가한다.

2. 문항 해설

본 문제는 주사위를 던져 확률적인 시행을 한 후 2번의 시행으로부터 얻은 점수의 확률을 계산하는 과정을 다루고 있다. 확률의 덧셈정리 및 곱셈정리를 이용하여 각 시행에서의 점수의 확률을 계산하고, 각 시행이 독립시행임을 이용하여 점수의 확률을 개별 시행의 점수의 확률로 나타내 최종 확률을 계산할 수 있어야 한다. 여사건의 확률을 이용하여 계산을 더욱 간단히 할 수 있다.

3. 채점 기준

(선행학습 영향평가 참조)

4. 모범 답안

(1) 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 수의 눈의 합이 4 이하인 사건을 A라고 하자. 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 수의 눈의 합이 4 이하인 경우의 수는 $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$의 6가지이므로, 사건 A가 일어날 확률은 $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$이다.

(2) 시행을 2회 반복할 때 얻은 점수의 합이 0인 사건과 점수의 합이 1인 사건은 서로 배반사건이므로, 점수의 합이 2 미만일 확률은 점수의 합이 0인 확률과 점수의 합이 1인 확률의 합과 같다. 또한, 점수의 합이 2 이상인 사건은 점수의 합이 2 미만인 사건의 여사건이다. 따라서,
P(점수의 합≥ 2)$=1-P$(점수의 합≤ 1)$=1-P$(점수의 합$=0$)$-P$(점수의 합$=1$)으로 구할 수 있다.

(3) 문제의 시행을 1회 했을 때 얻은 점수를 X라 하고, $X=0$인 사건을 C, $X=1$인 사건을 D라 하자. 각 시행은 독립시행이므로 P(점수의 합$=0$)$=\{P(C)\}^2$이며, 점수의 합이 1이려면 첫 번째 시행에서 0점, 두 번째 시행에서 1점을 얻거나 첫 번째 시행에서 1점, 두 번째 시행에서 0점을 얻으면 되므로
P(점수의 합$=1$)$=P(C)\times P(D)+P(D)\times P(C)=2\times P(C)\times P(D)$이다.

(4) 확률의 곱셈정리와 덧셈정리를 이용하면, $P(C)$, $P(D)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$P(C)=P(C\cap A)+P(C\cap A^c)=P(A)P(C|A)+P(A^c)P(C|A^c)$

$P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap A^c)=P(A)P(D|A)+P(A^c)P(D|A^c)$

(5) $P(C|A)$와 $P(D|A)$, $P(C|A^c)$와 $P(D|A^c)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$P(C|A)=\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$, (나머지 색깔 중에서만 2개를 꺼낼 확률)

$P(D|A)=\frac{{}_6C_1\times{}_4C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$, (빨간색 공 1개, 나머지 색깔 중 1개를 꺼낼 확률)

$P(C|A^c)=\frac{{}_6C_1}{{}_{10}C_1}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, (나머지 색깔 중에서만 1개를 꺼낼 확률)

$P(D|A^c)=\frac{{}_4C_1}{{}_{10}C_1}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, (빨간색 공 1개를 꺼낼 확률)

(6) (4), (5)를 종합하면 $P(C)$, $P(D)$는 다음과 같다.

$P(C)=\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{5}{6}\times\frac{3}{5}\right)=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$,

$P(D)=\left(\frac{1}{6}\times\frac{8}{15}\right)+\left(\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}\right)=\frac{19}{45}$

(7) 최종적으로, 구하는 확률은 다음과 같다.

$1-\{P(C)\}^2-2\times P(C)\times P(D)=1-\left(\frac{5}{9}\right)^2-\left(2\times\frac{5}{9}\times\frac{19}{25}\right)=1-\frac{25}{81}-\frac{38}{81}=\frac{18}{81}=\frac{2}{9}$

(별해)

(1) 여사건을 활용하지 않고 직접 답을 구할 수 있다. $X=2$인 사건을 E라 하면

$P(E)=\left(\frac{1}{6}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\right)+\left(\frac{5}{6}\times 0\right)=\frac{1}{45}$이며, 이때

점수의 합이 2일 확률$=2\times P(C)\times P(E)+\{P(D)\}^2=\frac{2}{81}+\frac{361}{45^2}=\frac{411}{45^2}$

점수의 합이 3일 확률$=2\times P(D)\times P(E)=\frac{38}{45^2}$

점수의 합이 4일 확률$=\{P(E)\}^2=\frac{1}{45^2}$

이므로 모두 더하면 $\frac{411+38+1}{45^2}=\frac{450}{45^2}=\frac{2}{9}$이다.

(문제2)

1. 출제 의도

본 문제에서는 고교 수학에서 중요하게 다루는 수열과 합, 함수의 부분적분등을 잘 이해하고 있는지 평가한다.

[문제 2-1] 고교과정에서 다루는 수열의 합을 이용하여 수열을 계산하는 방법을 숙지하고 있는지 평가한다.

[문제 2-2] 부분적분을 이용하고 활용하여 여러 가지 함수의 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

2. 문항 해설

[문제 2-1]

본 문제는 수열의 합을 이용하여 일반항을 구하는 공식을 이용하여 처음 몇 개의 항을 구함으로써 거꾸로 첫 번째 항을 유추하게 하는 문제로 수열의 합을 이용하여 첫 번째 항을 유추하는 문제이다.

[문제 2-2]

문제에 주어진 조건을 이해하여 함수식을 각 구간에서 유추하고 유추된 함수식을 부분적분하여 정적분의 값을 구하는 문제이다. 부분적분을 하는 함수는 교과서에서 학생들이 연습한 함수이며 부분적분을 하여 정적분의 값을 구할 수 있는지 평가하고자 하였다.

3. 채점 기준

(선행학습 영향평가 참조)

4. 모범 답안

(문제2-1)

제시문에서 주어진 식 $a_n=S_n-S_{n-1}\ \ (n\geq 2)$를 이용하면

$n=2m+2\ \ (m\geq 0)$인 경우, $S_{2m+2}=\frac{1}{2}(S_{2m+2}-S_{2m+1})-2$,

즉, $S_{2m+2}=-S_{2m+1}-4$를 얻는다.

$n=2m+1\ \ (m\geq 1)$인 경우, $S_{2m+1}=2(S_{2m+1}-S_{2m})+3$,

즉, $S_{2m+1}=2S_{2m}-3$을 얻는다.

그러므로, $S_{2m+2}=-(2S_{2m}-3)-4=-2S_{2m}-1$이고, 반복하여 대입하면

$S_8=-2S_6-1=4S_4+1=-8S_2-3$을 얻는다. 따라서, $S_2=-\frac{507}{2}$이고,

$S_2=-S_1-4$를 이용하면, $S_1=a_1=\frac{499}{2}$이다.

(별해)

주어진 제시문을 이용하여 $S_2-S_1=\frac{1}{2}a^2-2-a_1=a_2$이므로, $a_2=-2a_1-4$,

$S_2=-a_1-4$를 얻는다. $S_3-S_2=2a_3+3-(-a_1-4)=a_3$이므로, $a_3=-a_1-7$,

$S_3=-2a_1-11$을 얻고, 동일한 방법으로 $a_4=4a_1+18$, $S_4=2a_1+7$,

$a_5=2a_1+4$, $S_5=4a_1+11$, $a_6=-8a_1-26$, $S_6=-4a_1-15$,

$a_7=-4a_1-18$, $S_7=-8a_1-33$,

$a_8=16a_1+62$, $S_8=8a_1+29$를 얻는다. 따라서, $a_1=\frac{499}{2}$를 얻는다.

(문제2-2)

$f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)-\frac{3}{2}$ 이므로 $f(x-2)=2f(x)+3$

즉, $f(x)=2f(x+2)+3=4f(x+4)+9$이다.

따라서, $-4\le x<-3$일 때, $f(x)=4(x+4)^2\cos(\pi(x+4))+9$이고,

$-3\le x\le -2$일 때, $f(x)=-2(x+2)^2\cos(\pi(x+2))+3$,

$-2\le x<-1$일 때, $f(x)=2(x+2)^2\cos(\pi(x+2))+3$이다.

구하는 정적분을

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{-1}f(x)dx&=4\int_{-4}^{-3}(x+4)^2\cos\pi(x+4)dx\\&\quad-2\int_{-3}^{-2}(x+2)^2\cos\pi(x+2)dx+2\int_{-2}^{-1}(x+2)^2\cos\pi(x+2)dx+15\\&=4\int_0^1x^2\cos(\pi x)dx-2\int_0^1x^2\cos(\pi x)dx+2\int_0^1x^2\cos(\pi x)dx+15\\&=4\int_0^1x^2\cos\pi dx+15\ \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

로 정리할 수 있다.

주어진 제시문의 부분적분에 의해

$$\begin{aligned}\int x^2\cos\pi xdx&=\frac{1}{\pi}x^2\sin\pi x-\frac{2}{\pi}\int x\sin\pi xdx\\&=\frac{1}{\pi}x^2\sin\pi x+\frac{2}{\pi^2}x\cos\pi x-\frac{2}{\pi^2}\int\cos\pi xdx\\&=\frac{1}{\pi}x^2\sin\pi x+\frac{2}{\pi^2}x\cos\pi x-\frac{2}{\pi^3}\sin\pi x+C\end{aligned}$$

이다. 따라서,

$$(*)=4\left[\frac{1}{\pi}x^2\sin\pi x+\frac{2}{\pi^2}x\cos\pi x-\frac{2}{\pi^3}\sin\pi x\right]_0^1+15=-\frac{8}{\pi^2}+15$$

이다.

(문제3)

1. 출제 의도
함수의 미분과 적분을 문제에 맞게 적절히 구사하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지 평가한다. 또한 점과 직선과의 거리를 구할 수 있는지, 삼각함수의 기본연산을 잘 이해하고 있는지 평가한다.

[문제 3-1] 주어진 방정식의 그래프를 이해하는지 그리고 미분을 통하여 주어진 직선과 가장 가까운 점을 구할 수 있는지 평가한다. 이를 통해 삼각형의 넓이의 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 3-2] 주어진 상황에 맞는 함수를 구성하고 이를 정적분할 수 있는지 평가한다.

2. 문항 해설
[문제 3-1]
주어진 방정식의 그래프를 이해하고 삼각형의 넓이의 최솟값을 구하기 위하여 미분을 통하여 주어진 직선과 가장 가까운 점을 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 3-2]
삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 함수를 구성하고 치환적분을 이용하여 주어진 정적분의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

3. 채점 기준
(선행학습 영향평가 참조)

4. 모범 답안
(문제3-1)
$0=y^3-3e^{2x}y+2e^{3x}=(y-e^x)^2(y+2e^x)$이므로 $\mathrm{P(x,\ y)}$는 $y=e^x$ 또는 $y=-2e^x$ 위에 있다. $y\geq 0$이므로 $y=e^x$ 위에 있다. 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $2x-y-6=0$이다. $y=e^x$에서 기울기가 2인 점은 $(\ln 2,\ 2)$이고, 이 점에서 직선 $2x-y-6=0$까지의 거리는 $\dfrac{8-2\ln 2}{\sqrt{5}}$이다. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5}$이므로 삼각형의 넓이의 최솟값은 $4-\ln 2$이다.

(문제3-2)
두 삼각형의 넓이의 합이 전체 삼각형의 넓이와 같다는 것을 이용하면

$$2\sin 3x=2f(x)\sin x+f(x)\sin 2x$$

이고 $\sin 3x=\sin(x+2x)=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x$를 이용하여 정리하면

$$f(x)=\frac{4\cos^2 x-1}{1+\cos x}$$

이다. $\cos x=y$로 치환하여 적분하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\cos^2 x-1}{1+\cos x}\sin^3 x\,dx&=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{4y^2-1}{y+1}(1-y^2)dy\\&=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(4y^2-1)(1-y)dy\\&=\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{3}{16}\end{aligned}$$

(문제4)

1. 출제 의도

공간도형의 기본 구성 요소인 점, 직선, 평면의 성질을 잘 이해하고 이차곡선을 대수적으로 잘 다룰 수 있는지를 평가한다.

[문제 4-1] 삼수선의 정리를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
[문제 4-2] 쌍곡선과 접선의 위치 관계를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

2. 문항 해설

[문제 4-1] 공간도형의 선과 선, 선과 면의 위치 관계를 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구하는 문제이다. 삼수선 정리를 활용하여 직각삼각형을 찾아 변의 길이를 구할 수 있는지를 평가한다.
[문제 4-2] 주어진 점에서의 쌍곡선의 접선과 쌍곡선의 점근선 사이의 위치 관계를 이용하여 점과 직선 사이의 거리를 구하는 문제이다. 접선의 방정식을 잘 활용할 수 있는지를 평가한다.

3. 채점 기준

(선행학습 영향평가 참조)

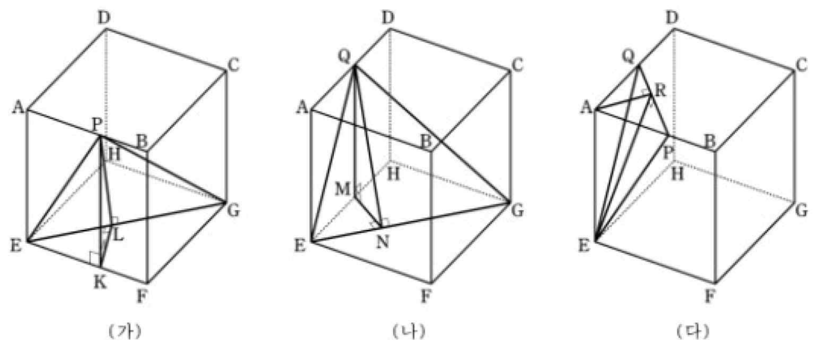
4. 모범 답안

(문제4-1)

그림 (가), (나)와 같이 점 P, Q에서 선분 EF, EH에 내린 수선의 발을 각각 K, M이라고 하고 점 K, M에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 각각 L, N이라고 하자. 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PL}} \perp \overline{\mathrm{EG}}$이고, $\overline{\mathrm{QN}} \perp \overline{\mathrm{EG}}$이다. 직각이등변삼각형 EFG에서 $\overline{\mathrm{EG}} = 2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{10} = \triangle\mathrm{PEG} = \dfrac{\overline{\mathrm{EG}} \times \overline{\mathrm{PL}}}{2}$에서 $\overline{\mathrm{PL}} = \sqrt{5}$이고 $3 = \triangle\mathrm{QEG} = \dfrac{\overline{\mathrm{EG}} \times \overline{\mathrm{QN}}}{2}$에서 $\overline{\mathrm{QN}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$이다.

직각삼각형 PKL, QMN에서 $\overline{\mathrm{KL}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PL}}^2 - \overline{\mathrm{PK}}^2} = 1$이고 $\overline{\mathrm{MN}} = \sqrt{\overline{\mathrm{QN}}^2 - \overline{\mathrm{QM}}^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$이다.



직각이등변삼각형 KLE, ENM에서

$$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{EK}} = \sqrt{\overline{\mathrm{EL}}^2 + \overline{\mathrm{KL}}^2} = \sqrt{\overline{\mathrm{KL}}^2 + \overline{\mathrm{KL}}^2} = \sqrt{2}$$

와

$$\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{EM}} = \sqrt{\overline{\mathrm{EN}}^2 + \overline{\mathrm{MN}}^2} = \sqrt{\overline{\mathrm{MN}}^2 + \overline{\mathrm{MN}}^2} = 1$$

을 얻는다. 그림 (다)와 같이 점 A에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 R라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}} \perp \overline{\mathrm{ER}}$이다. 직각삼각형 QAP에서

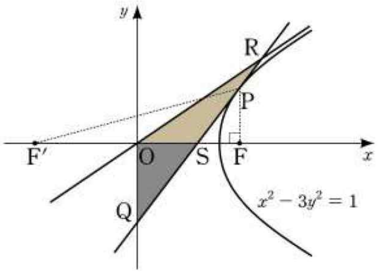
$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{AQ}}^2} = \sqrt{3}$이므로

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{AQ}}}{2} = \triangle\mathrm{APQ} = \dfrac{\overline{\mathrm{PQ}} \times \overline{\mathrm{AR}}}{2}$에서 $\overline{\mathrm{AR}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이다. 직각삼각형 RAE에서

$\overline{\mathrm{ER}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AR}}^2 + \overline{\mathrm{AE}}^2} = \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$이므로

$$\triangle\mathrm{EPQ} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PQ}} \times \overline{\mathrm{ER}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

(문제4-2)



$c=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$에서 두 초점 F, F′의 좌표는 각각 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$이므로 $\overline{\mathrm{FF'}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$이다. 점 P에서의 접선의 방정식 $ax-3by=1$과 점근선의 방정식 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$을 연립하여 점 R의 x좌표가 $\frac{1}{a-\sqrt{3}b}$임을 알 수 있다. 접선 $ax-3by=1$이 x축과 만나는 점을 S라 할 때, 점 S의 x좌표는 $\frac{1}{a}$이다.

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times$(점 R의 x좌표)$=\triangle\mathrm{OQR}=2\triangle\mathrm{OQS}=2\times\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times$(점 S의 x좌표)에서 $a=2\sqrt{3}b$를 얻는다. 점 P(a, b)가 쌍곡선 위의 점이므로 $a^2-3b^2=1$이므로 $a=2\sqrt{3}b$를 대입하여 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $b=\frac{1}{3}$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{FP}}=\frac{1}{3}$, $\overline{\mathrm{F'P}}=2+\overline{\mathrm{FP}}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$이고 삼각형 F′FP은 직각삼각형이다. 점 F에서 직선 F′P에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{FH}}\times\overline{\mathrm{F'P}}=2\times\triangle\mathrm{F'FP}=\overline{\mathrm{F'F}}\times\overline{\mathrm{FP}}$에서 $\overline{\mathrm{FH}}=\frac{4\sqrt{3}}{21}$을 얻는다. 따라서 점 F와 직선 F′P사이의 거리는 $\frac{4\sqrt{3}}{21}$이다.