중앙대학교 25 수시(자연계열2)

[문제1] 다음 규칙에 따라 상금을 받는 시행을 한다. 풀이와 함께 물음에 답하시오.

(가) 주머니 A에는 빨간색 공 1개가 들어 있고, 주머니 B에는 파란색 공 5개가 들어 있다. 두 주머니의 공을 주머니 C에 합친 후 임의로 1개를 꺼내서 그 공이 빨간색 공일 때 100만 원의 상금을 받는다. 만일 파란색 공을 꺼낸 경우 상금은 0원이다.

(나) 주머니 C에 합치기 전에, 회당 2만 원의 비용을 지불하면 주머니 A 또는 B를 선택한 후 선택한 주머니에서 임의로 1개의 공을 택하여 제거한다.

(다) (나)는 최대 2회 가능하며, $k\,(k=1$ 또는 $2)$번째에서 주머니를 선택하는 규칙은 다음과 같다.

- 주머니 A를 선택할 확률은 $\frac{a}{k}$이고, 주머니 B를 선택할 확률은 $1-\frac{a}{k}$이다.
- 주머니 A에 공이 없는 경우 주머니 B에서 공을 택한다.

(라) 공을 제거할 때 지불하는 비용은 상금에서 차감된다. 따라서 상금의 값은 음수가 될 수 있다.

위 시행에서 공을 2회 제거할 때의 상금의 기댓값이 공을 1회 제거할 때의 상금의 기댓값보다 크거나 같도록 하는 a의 최댓값을 구하시오. (단, $0<a<1$이다.) [20점]

[문제2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

●함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는 다음과 같다.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

●함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

●함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

●두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 다음과 같다.

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

●미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면 $\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$이다.

[문제2-1] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'\left(\frac{1}{3}\right)$의 값을 구하시오. [10점]

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{e^{f(x)}-e}{x-1}=0$이다.

(나) $f''(-1)>0$이다.

(다) 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{53}{12}$이다.

[문제 2-2] 좌표평면 위의 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\frac{1}{t+1}x+e^{\frac{t^2-2}{t+1}}$ (단, $t>-1$)가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(t)$라 하자. 정적분 $\int_0^1 S(t)dt$의 값을 구하시오. [15점]

[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

●두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 다음이 성립한다.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

●좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{y}_1)$, $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2,\ \mathrm{y}_2)$사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)^2 + (\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_2)^2}$ 이다.

●미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 α와 β를 양 끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

[문제 3-1] 좌표평면 위의 세 직선 $y = 0$, $x = 1$, $x = e$와 곡선 $y = (\ln x)^n$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 a_n이라 하자. 수열의 합 $\displaystyle\sum_{n=1}^{13} \{a_{n+1} + (n+1)a_n\} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln\left(\frac{n}{15}\right)\ln\left(\frac{n+1}{15}\right)}$을 구하시오. [10점]

[문제 3-2] 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ \mathrm{t})$, $\mathrm{B}(-1,\ \mathrm{t})$, $\mathrm{P}(\mathrm{x},\ 0)$이 있다. 실수 $t(t > 0)$에 대하여 함수 $f(x)$는

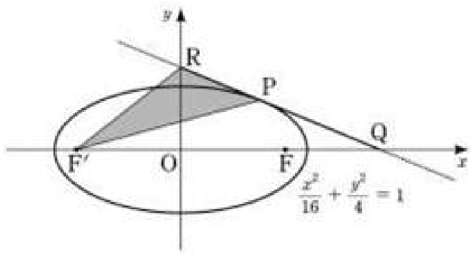
$$f(x) = \ln\overline{\mathrm{PA}} + \ln\overline{\mathrm{PB}}$$

이다. 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 할 때, 정적분 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} 2tg(t)dt$의 값을 구하시오. [15점]

[문제 4] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

●타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$이다.
●타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ 이다.
●두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 이다.

[문제 4-1] 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. 선분 QR의 길이가 최소일 때, 삼각형 PRF'의 넓이를 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [15점]



[문제 4-2] $(m-5)^2+(n-4)^2<9$를 만족시키는 두 정수 m, n에 의하여 정의된 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(m,\ n)$과 원 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 내적 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [15점]

(논제 해결)

(문제1)

1. 출제 의도

일상생활에서의 복잡한 상황을 더 쉽게 표현하고 잘 이해하기 위해서, 상황을 확률적 문제로 계량화하는 작업은 아주 중요하다. 특히, 이산확률변수의 확률분포를 통해 기댓값을 계산하는 과정은 확률적 상황 및 성질을 파악하기 위한 중요한 과정이다. 본 문제에서는 서로 다른 이산확률변수의 기댓값을 계산하고, 이를 비교하여 이차부등식으로 나타낸 후 그 해를 구하는 능력을 평가한다.

2. 문항 해설

본 문제는 서로 다른 색깔의 공 중에서 특징 색깔의 공을 꺼내면 상금을 받는 상황을 다루고 있다. 단, 공을 꺼내기 전에 비용을 지불하면 원하는 공을 꺼내는 확률이 바뀌므로, 상금의 기댓값 역시 달라진다. 비용을 지불하는 횟수가 1회일 때와 2회일 때의 상금의 기댓값을 각각 계산하고, 두 기댓값을 비교하여 이차부등식을 세우고 해결할 수 있어야 한다.

3. 채점 기준

(선행 학습 영향평가 참조)

4. 모범 답안

(1) 공을 1회 제거할 때의 상금을 X(단위: 만 원)라고 하자. X가 가질 수 있는 값은 -2 또는 98이므로, 각각에 대한 확률을 구한다. $X=-2$인 사건을 A, $X=98$인 사건을 B라 하자.

(2) $P(A)$는 파란색 공을 꺼낼 확률과 같다. 파란색 공을 꺼내는 사건은 1) 빨간색 공이 제거되어 선택하지 못하는 사건과 2) 빨간색 공이 남아 있지만 꺼내지 못하는 사건으로 나눌 수 있다. 따라서 빨간색 공이 제거된 사건을 E라고 하면, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리에 의해 $P(A)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$P(A)=P(E)P(A|E)+P(E^c)P(A|E^c)$

(3) 문제의 조건에 의해 $P(E)=a$이다. 빨간색 공이 제거되었다면 조건에 의해 선택할 수 없으므로 $P(A|E)=1$이다. 빨간색 공이 제거되지 않았다면 남아 있는 5개의 공 중에 파란색 공이 4개이므로 $P(A|E^c)=\frac{4}{5}$이다. 따라서

$P(A)=(a\times 1)+\left\{(1-a)\times\frac{4}{5}\right\}=\frac{1}{5}a+\frac{4}{5}$이다.

(4) 빨간색 공이 제거되었다면 조건에 의해 선택할 수 없으므로 $P(B|E)=0$이다. 빨간색 공이 제거되지 않았다면 남아 있는 5개의 공 중에 빨간색 공이 1개이므로

$P(B|E^c)=\frac{1}{5}$이다. 따라서 $P(B)=(a\times 0)+\left\{(1-a)\times\frac{1}{5}\right\}=-\frac{1}{5}a+\frac{1}{5}$이다.

혹은, $X=-2$인 사건과 $X=98$인 사건은 여사건이므로,

$P(B)=1-P(A)=-\frac{1}{5}a+\frac{1}{5}$임을 간단하게 구할 수 있다.

(5) 따라서, 1개의 공을 제거할 때의 상금의 기댓값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}E(X)&=\{(-2)\times P(A)\}+\{98\times P(B)\}\\&=\left\{(-2)\times\left(\frac{1}{5}a+\frac{4}{5}\right)\right\}+\left\{98\times\left(-\frac{1}{5}a+\frac{1}{5}\right)\right\}\\&=(-100)\times\frac{1}{5}a+\frac{90}{5}=-20a+18\end{aligned}$$

(6) 공을 2회 제거할 때의 상금을 Y(단위: 만 원)라고 하자. Y가 가질 수 있는 값은 -4 또는 96이다. $Y=-4$인 사건을 C, $Y=96$인 사건을 D라 하자.

(7) $P(C)$는 파란색 공을 꺼낼 확률과 같으므로, 빨간색 공이 제거된 사건을 F라고 하면 $P(C)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$P(C)=P(E)P(C|F)+P(F^c)P(C|F^c)$

(8) 빨간색 공이 제거되지 않을 확률은 $P(F^c)=(1-a)\left(1-\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}a+1$이다.

따라서 $P(F)=1-P(F^c)=-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a$이다.

(9) 빨간색 공이 제거되었다면 조건에 의해 선택할 수 없으므로 $P(C|F)=1$이다. 빨간색 공이 제거되지 않았다면 남아 있는 4개의 공 중에 파란색 공이 3개이므로

$P(C|F^c)=\frac{3}{4}$이다. 따라서

$$P(C)=\left\{\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a\right)\times 1\right\}+\left\{\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}a+1\right)\times\frac{3}{4}\right\}$$
$$=\frac{1}{8}a^2+\frac{3}{8}a+\frac{3}{4}$$

이다.

(10) 빨간색 공이 제거되었다면 조건에 의해 선택할 수 없으므로 $P(D|F)=0$이다. 빨간색 공이 제거되지 않았다면 남아 있는 4개의 공 중에 빨간색 공이 1개이므로 $P(D|F^c)=\frac{1}{4}$이다. 따라서

$$P(D)=\left\{\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a\right)\times 0\right\}+\left\{\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}a+1\right)\times\frac{1}{4}\right\}$$
$$=\frac{1}{8}a^2-\frac{3}{8}a+\frac{1}{4}$$이다.

혹은, (4)와 마찬가지로 $P(D)=1-P(C)=\frac{1}{8}a^2-\frac{3}{8}a+\frac{1}{4}$임을 간단하게 구할 수도 있다.

(11) 따라서, 공을 2회 제거할 때의 상금의 기댓값은 다음과 같다.

$$E(Y)=\{(-4)\times P(C)\}+\{96\times P(D)\}$$
$$=\left\{(-4)\times\left(-\frac{1}{8}a^2+\frac{3}{8}a+\frac{3}{4}\right)\right\}+\left\{96\times\left(\frac{1}{8}a^2-\frac{3}{8}a+\frac{1}{4}\right)\right\}$$
$$=(100)\times\left(\frac{1}{8}a^2-\frac{3}{8}a\right)+\frac{84}{4}=\frac{25}{2}a^2-\frac{75}{2}a+21$$

(12) 조건을 만족하는 a의 최댓값을 구하기 위해서 다음의 2차 부등식을 풀면 된다.

$$E(Y)\geq E(X)$$
$$\Leftrightarrow\frac{25}{2}a^2-\frac{75}{2}a+21\geq -20a+18$$
$$\Leftrightarrow 25a^2-35a+6\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (5a-1)(5a-6)\geq 0$$

따라서, $0<a<1$을 만족하는 a의 최댓값은 $\frac{1}{5}$이다.

(별해)

(1) 제거를 1회 할 때, -2의 비용은 1의 확률로 발생한다. 따라서

$$E(X)=100\times P(B)-2$$
$$=100\times\left(-\frac{1}{5}a+\frac{1}{5}\right)-2$$
$$=-20a+18$$

이다.

(2) 제거를 2회 할 때, -4의 비용은 1의 확률로 발생한다. 따라서

$$\begin{aligned} E(Y) &= 100 \times P(D) - 4 \\ &= 100 \times \left(\frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{8}a + \frac{1}{4}\right) - 4 \\ &= \frac{25}{2}a^2 - \frac{75}{2}a + 21 \end{aligned}$$

이다.

(문제2)

1. 출제 의도

본 문제에서는 미적분의 핵심 개념인 미분과 적분의 의미를 이해하고 이를 이해하여 구체적인 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[문제 2-1] 미분계수를 이용하여 삼차함수의 그래프의 개형을 유추할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[문제 2-2] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하고 이를 통하여 두 근의 차의 제곱을 이차방정식의 계수로 표현한다. 또한 삼각형의 넓이를 함수로 표현하고 이의 적분을 치환적분을 이용하여 해결하는 능력을 평가하는 문제이다.

2. 문항 해설

[문제 2-1]

미분계수를 이용하여 주어진 3차함수의 극값을 찾고 이계도함수를 이용하여 3차함수의 그래프의 개형을 유추하는 것은 고등학교 과정에서 핵심적인 문제이다. 이 문제에서는 미분계수를 이용하여 중근을 갖는 것을 보이고 이계도함수를 이용하여 접선의 위치를 유추하고 적분을 통해 그 넓이를 알아낼 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

[문제 2-2]

2차 방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 알고 이를 이용하여 두 근의 차의 제곱의 식을 알아내는 것은 고교 수학과정에서 핵심적인 문제이다. 또한 치환적분과 간단한 분수 함수의 적분을 함으로써 학생들의 적분 계산 능력을 평가하고자 하였다.

3. 채점 기준

(선행학습 영향평가 참조)

4. 모범 답안

(문제 2-1)

극한 $\lim_{x\to1}\frac{e^{f(x)}-e}{x-1}$이 존재하므로, $f(1)=1$이다.

$g(x)=e^{f(x)}$라 놓으면, $g'(x)=f'(x)e^{f(x)}$이고, 주어진 조건으로부터

$g'(1)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=0$이므로, $f'(1)=0$이다.

따라서, $x=1$이 $f(x)-1=0$의 중근임을 알 수 있다. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수는 $f(x)-1=(x-1)^2(x-b)$로 놓을 수 있다.

$f'(x)=(x-1)(3x-2b-1)$이므로, $f'(-1)=4(b+2)$이고, $f(-1)=-4b-3$이다.

그러므로, 점 $(-1,\ f(-1))$에서 접선의 방정식은 $y=4(b+2)x+5$이다.

제시문에 의해 $x=-1$을 포함하는 어떤 구간에서 $y=f(x)$가 아래로 볼록이므로 접선의 방정식이 $y=f(x)$의 그래프보다 아래에 있고, 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0}\{(x-1)^2(x-b)-4(b+2)x-4\}dx &= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{b+2}{3}x^3-\frac{2b+7}{2}x^2-(b+4)x\right]_{x=-1}^{0} \\ &= -\left(\frac{17}{12}+\frac{b}{3}\right) \end{aligned}$$

이다. 따라서, $b=-\frac{35}{2}$이다.

이를 대입하면 $f'(x)=(x-1)(3x+34)$이므로, $f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{70}{3}$이다.

(문제2-2)

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\frac{1}{t+1}x+e^{\frac{t^2-2}{t+1}}$가 만나는 점의 x좌표는

$x^2-\frac{1}{t+1}x-e^{\frac{t^2-2}{t+1}}=0$을 만족하므로, 두 점의 좌표를 $(\alpha,\ \alpha^2)$, $(\beta,\ \beta^2)$이라 놓을 수 있다. 따라서, 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합과

곱은 각각 $\alpha+\beta=\frac{1}{t+1}$, $\alpha\beta=-e^{\frac{t^2-2}{t+1}}$를 만족한다.

정삼각형의 넓이 $S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{PQ}}^2$이고, 여기서, 두 점 사이의 거리를 이용하면

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2})^2=(\beta-\alpha)^2(1+(\beta+\alpha)^2)$이다.

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{1}{(t+1)^2}+4e^{\frac{t^2-2}{t+1}}$이다. 따라서, 구하는 정적분은

$$\int_0^1 S(t)dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{(t+1)^2}+1\right)\left(\frac{1}{(t+1)^2}+4e^{\frac{t^2-2}{t+1}}\right)dt$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\int_0^1\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{(t+1)^4}dt+4\int_0^1 e^{t-1-\frac{1}{t+1}}\left(1+\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt\right\}$$

이다.

$\left(t-1-\frac{1}{t+1}\right)=1+\frac{1}{(t+1)^2}$이므로, $\int e^{t-1-\frac{1}{t+1}}\left(1+\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=e^{t-1-\frac{1}{t+1}}+C$ 이다.

따라서, 주어진 정적분을 계산하면

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left[-\frac{1}{3(t+1)^3}-\frac{1}{t+1}+4e^{t-1-\frac{1}{t+1}}\right]_{x=0}^1=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{19}{24}+4e^{-\frac{1}{2}}-4e^{-2}\right)$$

이다. 정리하면 $\frac{19}{96}\sqrt{3}+\sqrt{3}(e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2})$이다.

(문제3)

1. 출제 의도

정적분을 하여 수열을 구하고, 수열의 합을 구한다. 문제를 이해하여 함수를 구성하고 그래프의 개형을 고려하여 최솟값을 구하고 정적분을 한다.

[문제 3-1] 수열을 구하고 수열의 합을 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 3-2] 문제를 이해하여 함수를 구한다. 그래프의 개형을 고려하여 최솟값을 구한 후, 주어진 정적분 값을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 문항 해설

[문제 3-1]

정적분을 하여 수열을 구하고 수열의 합을 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 3-2] 문제를 이해하여 함수를 구성하고 여러 가지 미분법을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.

3.채점 기준

(선행학습 영향평가 참조)

4. 모범 답안

(문제 3-1)

$a_{n+1}=\int_1^e (\ln x)^{n+1}dx$이고 부분적분을 적용하여

$a_{n+1}=\int_1^e (\ln x)^{n+1}dx=\Big[x(\ln x)^{n+1}\Big]_1^e-\int_1^e (n+1)(\ln x)^n dx=e-(n+1)a_n$

을 얻을 수 있다. 정리하면 $a_{n+1}+(n+1)a_n=e$이다. 구하는 수열의 합은 다음과 같다.

$$e\sum_{n=1}^{13}\frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln\left(\frac{n}{15}\right)\ln\left(\frac{n+1}{15}\right)}=e\sum_{n=1}^{13}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{15}\right)-\ln\left(\frac{n}{15}\right)}{\ln\left(\frac{n}{15}\right)\ln\left(\frac{n+1}{15}\right)}$$

$$=e\sum_{n=1}^{13}\left\{\frac{1}{\ln\frac{n}{15}}-\frac{1}{\ln\frac{n+1}{15}}\right\}$$

$$=e\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{15}}-\frac{1}{\ln\frac{14}{15}}\right)=e\left(\frac{1}{\ln\frac{15}{14}}-\frac{1}{\ln 15}\right)$$

이다.

(문제3-2)

$\ln\overline{\mathrm{PA}}+\ln\overline{\mathrm{PB}}=\frac{1}{2}\ln(\overline{\mathrm{PA}}^2\overline{\mathrm{PB}}^2)$이고 $\overline{\mathrm{PA}}^2\overline{\mathrm{PB}}^2=((\mathrm{x}-1)^2+\mathrm{t}^2)((\mathrm{x}+1)^2+\mathrm{t}^2)$이다. 식을 정리 하면

$(x^2+1+t^2+2x)(x^2+1+t^2-2x)=(x^2+1+t^2)^2-4x^2=(x^2+t^2-1)^2+4t^2$이다.

$0<t<1$이면 $x=\pm\sqrt{1-t^2}$에서 최솟값 $g(t)=\ln(2t)$를 갖는다.

$t\ge 1$이면 $x=0$에서 최솟값 $g(t)=\ln(t^2+1)$을 갖는다.

구하는 정적분은 $\int_{\frac{1}{2}}^2 2tg(t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 2t\ln(2t)dt+\int_1^2 2t\ln(t^2+1)dt$이다.

$\int_{\frac{1}{2}}^1 2t\ln(2t)dt=\Big[t^2\ln(2t)\Big]_{\frac{1}{2}}^1-\int_{\frac{1}{2}}^1 tdt=\ln 2-\frac{3}{8}$이고

$\int_1^2 2t\ln(t^2+1)dt=5\ln 5-2\ln 2-3$이다. 답은 $5\ln 5-\ln 2-\frac{27}{8}$이다.

(문제4)

1. 출제 의도

타원의 접선의 방정식과 벡터의 내적을 활용할 수 있는지 평가한다.

[문제 4-1] 두 점 사이의 거리와 삼각형의 넓이를 계산하기 위하여 타원의 접선 방정식을 활용할 수 있는지를 평가한다.

[문제 4-2] 평면벡터의 덧셈을 활용하여 두 평면벡터의 내적을 구할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항 해설

[문제 4-1]

타원의 위의 점에서의 접선이 두 좌표축과 만나는 두 점 사이의 거리가 최솟값을 가질 때, 주어진 삼각형의 넓이를 어떻게 계산하는지를 묻는 문제이다. 접선 방정식을 상황에 맞게 활용할 수 있는지를 평가한다.

[문제 4-2]

두 평면벡터의 내적을 벡터의 덧셈을 활용하여 계산할 수 있는지를 평가한다.

3. 채점 기준
(선행학습 영향평가 참조)

4. 모범 답안
(문제4-1)
$c=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$이므로 두 초점 F, F'의 좌표는 각각 $(2\sqrt{3},\ 0)$, $(-2\sqrt{3},\ 0)$이다.
접선의 기울기를 $m(m<0)$이라 하면 그 방정식은 $y=mx+\sqrt{16m^2+4}$로 주어진다. 접선의 x절편과 y절편을 구하여 점 Q, R의 좌표가 각각 $\left(\sqrt{16+\dfrac{4}{m^2}},\ 0\right)$, $(0,\ \sqrt{16m^2+4})$임을 알 수 있다. $\overline{\mathrm{QR}}^2$의 값이 최소일 때, $\overline{\mathrm{QR}}$의 값이 최소이다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{QR}}^2&=\overline{\mathrm{OQ}}^2+\overline{\mathrm{OR}}^2\\&=16+\frac{4}{m^2}+16m^2+4\\&=20+16m^2+\frac{4}{m^2}\geq 20+2\sqrt{16m^2\times\frac{4}{m^2}}\\&=36\end{aligned}$$

위 부등식에서 등호는 $16m^2=\dfrac{4}{m^2}$일 때 성립한다. 즉, $m=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$일 때이다. 따라서 점 Q, R는 각각 $(2\sqrt{6},\ 0)$과 $(0,\ 2\sqrt{3})$이다. 또 $\overline{\mathrm{F'Q}}=2\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$, $\overline{\mathrm{RO}}=2\sqrt{3}$ 이다(O는 원점).
점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면, 접선의 방정식은 $\dfrac{ax}{16}+\dfrac{by}{4}=1$로 주어지고 그 기울기는 $-\dfrac{a}{4b}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이다. $\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{b^2}{4}=1$와 연립하여 $b=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ (\because b>0)$이다. 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$이므로

$$\triangle\mathrm{PRF'}=\triangle\mathrm{QRF'}-\triangle\mathrm{QPF'}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{F'Q}}\times\overline{\mathrm{RO}}-\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{F'Q}}\times\overline{\mathrm{PH}}=4(\sqrt{2}+1)$$

(문제4-2)
$(m-5)^2+(n-4)^2<9$이므로 두 정수 $m-5$, $n-4$은 모두 -2, -1, 0, 1, 2 중 하나이다. 즉, 점 P의 좌표의 집합은 $S=\{(m,\ n)\,|\,m,\ n\text{은 } 3\leq m\leq 7, 2\leq n\leq 6\text{인 정수}\}$이다. 원 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$의 중심 $\mathrm{Z}(-1,\ 8)$과 좌표가 집합 S에 속하는 각각의 점 $\mathrm{P(m,\ n)}$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$가 이루는 각은 예각이다. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{ZQ}}$가 이루는 각을 θ라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OZ}}+\overrightarrow{\mathrm{ZQ}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ZQ}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{ZQ}}|\cos\theta\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta\end{aligned}$$

이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$는 $\theta=0$일 때 최댓값 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$를 갖는다.
m을 고정하였을 때, n이 클수록 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$가 이루는 각이 작아지고 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$는 커지므로 $n=6$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$가 최대로 커진다.
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최댓값을 찾기 위하여 점 P의 좌표가 $(3,\ 6)$, $(4,\ 6)$, $(5,\ 6)$, $(6,\ 6)$, $(7,\ 6)$인 경우를 고려하면 된다.
실수에서 정의된 함수

$$\begin{aligned}f(x)&=(x,\ 6)\cdot(-1,\ 8)+\sqrt{x^2+36}\\&=-x+48+\sqrt{x^2+36}\end{aligned}$$

의 도함수 $f'(x)$는 $f'(x)=-1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+36}}<0$을 만족시키므로 $f(x)$는 감소함수이다.
따라서 점 P의 좌표가 $(3,\ 6)$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$가 최댓값을 갖고 이때 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=45+\sqrt{45}$이다. 그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 최댓값은 $45+\sqrt{45}=45+3\sqrt{5}$이다.