서울과기대학교 24 수시

[문제1] 다음 물음에 답하시오.

[1.1] 이차함수 $f(x) = kx^2 - (k+4)x + k + 2$에 대하여 $y = f(x)$의 그래프와 x축과의 교점이 $(\sin\theta, 0)$, $(\cos\theta, 0)$이다. 이때 모든 θ값들의 합을 구하시오. (단, $0 < \theta < 2\pi$, k는 상수)

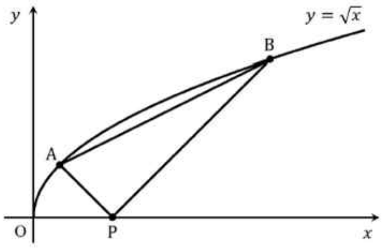
[1.2] 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족할 때, $f(x)$를 구하시오.

(가) $f'(-x) = -f'(x)$이다.
(나) $f(x)$는 $x = 2$에서 극솟값 -13을 갖는다.

[1.3] 높이가 1인 입체도형이 있다. 밑면으로부터의 높이가 x $(0 \le x \le 1)$인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면이 가로의 길이가 2^x이고 세로의 길이가 $x+1$인 직사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오.

[문제 2] 아래의 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위에 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(t,\ \sqrt{t})$, $\mathrm{B}(9t,\ 3\sqrt{t})$가 있다.
(나) x축 위의 점 P는 삼각형 APB의 둘레의 길이를 최소로 하는 위치에 있다.



[2.1] 점 P의 x좌표를 t에 대한 식으로 나타내시오.

[2.2] 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 두 점 A, B에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 하자. l_1과 l_2의 교점을 점 Q라 할 때, $\tan(\angle \mathrm{PQO})$를 t에 대한 식으로 나타내시오. (단, O는 원점)

[2.3] $\angle \mathrm{APB}$를 θ라 하자. $\cos\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}=-\dfrac{10}{3}$일 때, t의 값을 구하시오.

[문제 3] 아래의 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 중심이 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $3,\ 9,\ 27,\ \cdots,\ 3^n,\ \cdots$인 원이 좌표평면 위에 있다. (단, n은 자연수)
(나) 좌표평면 위를 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인다. 이 점 P의 위치 $(x,\ y)$는 $x=e^{2t}\cos t,\ y=e^{2t}\sin t$이다.
(다) 점 P가 움직이는 동안 만난 원의 개수를 N이라 하자.
(라) 필요한 경우, $1.09<\ln 3<1.10$을 이용한다.

[3.1] N을 구하시오.

[3.2] 점 P가 반지름의 길이가 3^N인 원을 만날 때까지, 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

[3.3] 급수 $\sum_{k=N}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\int_{k-1}^{k}\pi\sin(\pi x)dx$의 합을 구하시오.

(예시 답안)

[1.1]

$\sin\theta$, $\cos\theta$는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{k+4}{k},\ \sin\theta\cos\theta=\frac{k+2}{k}$$

이다. 따라서

$$\frac{(k+4)^2}{k^2}=1+\frac{2(k+2)}{k}$$

$$(k-4)(k+2)=0$$

이다.

$k=4$일 때, $f(x)=4x^2-8x+6=4(x-1)^2+2>0$이므로 x축과의 교점이 없다.

$k=-2$일 때, $f(x)=-2x^2-2x$가 되어 x축과의 교점의 좌표는 $(0,\ 0)$, $(-1,\ 0)$이다.

그러므로

$\sin\theta=0$, $\cos\theta=-1$일 때 $\theta=\pi$

$\sin\theta=-1$, $\cos\theta=0$일 때 $\theta=\frac{3}{2}\pi$

이다. 따라서 모든 θ값들의 합은 $\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$이다.

[1.2]

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이다. 조건 (가)에 의해 $f'(x)$의 이차항의 계수와 상수항은 0이다. 따라서

$$f'(x)=4x^3+ax$$

이다. 조건 (나)에 의해 $f'(2)=0$이므로 $a=-16$이다. 즉,

$$f'(x)=4x^3-16x$$

이다. 이를 적분하면 $f(x)=x^4-8x^2+C$ (단, C는 적분상수)이고 다시 조건 (나)에 의해

$$f(2)=16-32+C=-13$$

이므로 $C=3$이다. 즉, $f(x)=x^4-8x^2+3$이다.

[1.3]

단면의 넓이를 $(x+1)2^x$이다. 따라서 부피는

$$V=\int_0^1(x+1)2^x\,dx=\left[(x+1)\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{2^x}{\ln 2}dx$$

$$=\frac{3}{\ln 2}-\left[\frac{2^x}{(\ln 2)^2}\right]_0^1=\frac{3}{\ln 2}-\frac{1}{(\ln 2)^2}=\frac{3\ln 2-1}{(\ln 2)^2}$$

이다.

[2.1]

점 A를 x축에 대하여 대칭이동하여 얻은 점 $\mathrm{A}'(t,\ -\sqrt{t})$와 점 B를 지나는 직선의 x절편이 점 P의 x좌표이다. 이 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}x-\frac{3}{2}\sqrt{t}$$

이므로 $y=0$을 대입하면 점 P의 x좌표는 $3t$이다.

[2.2]

$f(x)=\sqrt{x}$라 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로 직선 l_1의 방정식과 직선 l_2의 방정식은 각각

$$y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2},\ y=\frac{1}{6\sqrt{t}}x+\frac{3}{2}\sqrt{t}$$

이다. 이 두 직선의 방정식을 연립하면 점 Q의 좌표는 $(3t,\ 2\sqrt{t})$이다. 삼각형 PQO는 각 OPQ가 직각인 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{t}$이므로

$$\tan(\angle \mathrm{PQO})=\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\frac{3t}{2\sqrt{t}}=\frac{3}{2}\sqrt{t}$$

이다.

[2.3]

$\cos\theta+\frac{1}{\cos\theta}=-\frac{10}{3}$이고 $\cos\theta\times\frac{1}{\cos\theta}=1$이므로 $\cos\theta$와 $\frac{1}{\cos\theta}$을 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $x^2+\frac{10}{3}x+1=0$이다.

$x^2+\frac{10}{3}x+1=\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+3)=0$이므로 이차방정식의 해는 $x=-3,\ -\frac{1}{3}$이고, $-1\le\cos\theta\le 1$이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{t+4t^2}$, $\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{9t+36t^2}$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4t+64t^2}$이므로 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}}=\frac{1-4t}{1+4t}=-\frac{1}{3}$$

이다. 마지막 등식을 풀면 $t=\frac{1}{2}$이다.

[3.1]

원점과 점 P 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(e^{2t}\cos t)^2+(e^{2t}\sin t)^2}=e^{2t}$이다. $t=0$에서 $t=\pi$일 때까지 점 P가 움직이므로 $t=\pi$일 때 원점과 점 P 사이의 거리 $e^{2\pi}$이 원의 반지름의 길이 3^N 이상이 되는 최대 자연수 N을 구하자.

$$3^N\le e^{2\pi}\quad\Rightarrow\quad N\ln 3\le 2\pi\quad\Rightarrow\quad N\le\frac{2\pi}{\ln 3}$$

이고, 주어진 조건 $1.09<\ln 3<1.10$에서 $\frac{2\pi}{1.10}<\frac{2\pi}{\ln 3}<\frac{2\pi}{1.09}$이므로 $5<\frac{2\pi}{\ln 3}<6$임을 알 수 있다.

따라서 $N=5$이다.

[3.2]

점 P가 마지막으로 만난 원의 반지름의 길이가 3^5이므로, 이때의 시각 t를 구하면 다음과 같다.

$$e^{2t}=3^5\quad\Rightarrow\quad t=\frac{5}{2}\ln 3$$

또한 $\frac{dx}{dt}=2e^{2t}\cos t-e^{2t}\sin t$, $\frac{dy}{dt}=2e^{2t}\sin t+e^{2t}\cos t$이고

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{4e^{4t}+e^{4t}}=\sqrt{5}\,e^{2t}$$

이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{5}{2}\ln 3}\sqrt{5}\,e^{2t}\,dt=\sqrt{5}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^{\frac{5}{2}\ln 3}=\frac{\sqrt{5}}{2}(243-1)=121\sqrt{5}$$

이다.

[3.3]

정적분을 계산하면

$$\int_{k-1}^{k}\pi\sin(\pi x)dx=\Big[-\cos(\pi x)\Big]_{k-1}^{k}=-\cos(k\pi)+\cos(k-1)\pi=2(-1)^{k-1}$$

이고 $N=5$이므로

$$\sum_{k=5}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\times\{2(-1)^{k-1}\}=\sum_{k=5}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

이다.