중앙대학교 24 수시 자연계열2

[문제1] 좌표평면의 원점 O에 있는 점 A는 다음과 같은 규칙에 따라 이동한다.

● 주머니에 숫자 2가 적힌 공 1개와 숫자 3이 적힌 공 1개가 들어 있다.

● 주머니에는 임의로 1개의 공을 꺼낸 후 그 공에 적힌 숫자를 m이라 하자.
점 A는 $\frac{1}{m}$의 확률로 원점 O와 점 $\mathrm{P}(12,\ 0)$을 이은 선분 OP를 $m:1$로 내분하는 점으로 이동하거나, $1-\frac{1}{m}$의 확률로 선분 OP를 $1:m$로 외분하는 점으로 이동한다. 이때 이동한 점을 $\mathrm{A}_1(x_1,\ 0)$이라 하고, 꺼낸 공은 다시 집어넣지 않는다.

● 주머니에 남아 있는 공에 적힌 숫자를 n이라 하자. 점 A_1은 $\frac{2}{n}$의 확률로 점 A_1과 점 $\mathrm{Q}(x_1,\ 8)$을 이은 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{Q}$를 $1:n$로 내분하는 점으로 이동하거나, $1-\frac{2}{n}$의 확률로 선분$\mathrm{A}_1\mathrm{Q}$를 $n:1$로 외분하는 점으로 이동한다. 이때 이동한 점을 $\mathrm{A}_2(x_1,\ y_1)$이라 한다.

두 점 $\mathrm{A}_2(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{P}(12,\ 0)$ 사이의 거리가 $|x_1|$보다 작을 확률을 구하시오. [20점]

[문제2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

● 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a,\,b]$에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad (\text{단, } a<x<b)$$

● 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

● 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때, 그 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가하고, $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

● 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\,y)$의 시각 t에서의 위치가 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 나타내어질 때, $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 $s=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$

이다.

● 미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,\,b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 α와 β를 양 끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

(문제2-1) 닫힌구간 $[-1,\,5]$에서 함수

$$f(x)=\int_{-1}^{x}(t^2+5)\left\{1-2\sin\left(\frac{\pi t}{t^2+5}\right)\right\}dt$$

의 최댓값을 구하시오. [10점]

(문제2-2) 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\,y)$가

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t,\quad y=\sqrt{3}\ln\left(1+\frac{\sin^2 t}{8}\right)$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [15점]

[문제3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 이다.
- 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.
- 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하고 $x = a$에서 극값을 가지면 $f'(a) = 0$이다.

(문제3-1) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \int_0^{\ln(n+1)} (2e^x - e^x)\,dx$일 때, 다음 식의 값을 구하시오 [10점]

$$\sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + 1\right) \frac{1}{a_k}$$

(문제3-2) 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(5, 0)$, $\mathrm{B}(0, 5)$, $\mathrm{P}(7\cos\theta, \sin\theta)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. (단, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$이다.) [15점]

[문제4] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

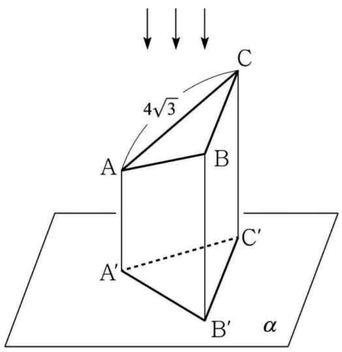
- 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$이다.

- 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$이고 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$이다.

- 평면 β 위에 있는 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ\le\theta\le 90^\circ)$라 하면 $S'=S\cos\theta$이다.

(문제4-1) 직선 $y=\sqrt{3}$ 위의 점 $\mathrm{P}(k,\ \sqrt{3})$에서 타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선이 이루는 예각이 45°일 때, k^2의 값을 구하시오. [15점]

(문제4-2) 넓이가 $6\sqrt{3}$이고 $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 평면 α와 만나지 않게 놓여 있다. 평면 α에 수직으로 입사하는 빛에 의한 삼각형 ABC의 그림자가 평면 α 위에서 그림과 같이 정삼각형 A′B′C′을 이룬다. $\overline{\mathrm{AA'}}+\overline{\mathrm{CC'}}=2\overline{\mathrm{BB'}}=10$일 때, 삼각형 ABC의 내접원의 그림자의 넓이를 구하시오. [15점]



(논제 해결)

(문제1)

1. 출제 의도

일상생활에서의 수많은 복잡한 상황들을 더 쉽고 잘 이해하기 위해서 그 상황을 확률적 문제로 계량화하는 작업은 아주 중요하다. 특히, 좌표평면 위에서의 두 점 사이의 관계에 따른 이산확률변수의 확률분포를 이해하고 상황에 맞는 구체적 확률을 계산하는 과정은 확률적 상황 및 성질을 파악하기 위한 중요한 과정이다. 본 문제에서는 주어진 상황에서 확률을 계산하고, 조건에 맞는 경우를 찾아내는 능력을 평가한다.

2. 문항 해설

본 문제는 주머니에서 공을 꺼내서 확률을 결정하고 그 상황에 맞게 좌표평면 위의 점들의관계를 계산해서 조건에 맞는 경우를 찾아내는 과정을 다루고 있다. 발생할 수 있는 모든 경우와 그 확률을 찾아내고, 상황에 맞는 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 계산할 수 있어야 한다. 최종적으로 두 점 사이의 거리를 계산하여 조건에 맞는 경우를 찾아내야 한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1	$m=2, n=3$인 경우 점 A_1과 A_2의 좌표와 그에 해당하는 확률을 정확히 계산하면 +8점 - 점 A_1의 좌표를 정확히 계산하면 +3점 - 점 A_2의 좌표를 정확히 계산하면 +3점 - 점 A_1과 A_2가 일어날 확률과 $\mathrm{A}\to\mathrm{A}_1\to\mathrm{A}_2$일 확률을 정확히 계산하면 +2점 $m=3, n=2$인 경우 점 A_1과 A_2의 좌표와 그에 해당하는 확률을 정확히 계산하면 +8점 - 점 A_1의 좌표를 정확히 계산하면 +3점 - 점 A_2의 좌표를 정확히 계산하면 +3점 - 점 A_1과 A_2가 일어날 확률과 $\mathrm{A}\to\mathrm{A}_1\to\mathrm{A}_2$일 확률을 정확히 계산하면 +2점 두 점 사이의 거리를 정확히 계산하고 $\lvert x_1\rvert$와 정확히 비교해서 정답을 찾아내면 +4점	20

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

4. 예시 답안

(1) 선분의 내분점과 외분점은 다음과 같이 정의된다.

● 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$이다. $(m>0,\ n>0)$

● 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$이다. $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$

(2) 일반적으로 (m, n)인 경우 $\mathrm{A}_1(x_1, 0)$과 $\mathrm{A}_2(x_1, y_1)$은 다음과 같이 계산할 수 있다.

선분 OP	$\mathrm{A}_1(x_1, 0)$	확률	선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{Q}$	$\mathrm{A}_2(x_1, y_1)$	확률
$m:1$로 내분	$\left(\dfrac{12m}{m+1}, 0\right)$	$\dfrac{1}{m}$	$1:n$으로 내분	$\left(x_1, \dfrac{8}{1+n}\right)$	$\dfrac{2}{n}$
$1:m$으로 외분	$\left(\dfrac{12}{1-m}, 0\right)$	$1-\dfrac{1}{m}$	$n:1$로 외분	$\left(x_1, \dfrac{8n}{n-1}\right)$	$1-\dfrac{2}{n}$

(3) $m=2$, $n=3$인 경우

● 선분 OP를 $2:1$로 내분한 점은 $(8,\ 0)$이고, $1:2$로 외분한 점은 $(-12,\ 0)$이다. 즉, 점 A는 $\frac{1}{2}$의 확률로 $A_1(8,\ 0)$으로 이동하거나, $\frac{1}{2}$의 확률로 $A_1(-12,\ 0)$으로 이동한다.

● 점 $A_1(8,\ 0)$일 때, 선분 A_1Q를 $1:3$으로 내분한 점은 $(8,\ 2)$이고, $3:1$로 외분한 점은 $(8,\ 12)$이다.
즉, 점 A_1은 $\frac{2}{3}$의 확률로 $A_2(8,\ 2)$로 이동하거나, $\frac{1}{3}$의 확률로 $A_2(8,\ 12)$로 이동한다.

● 점 $A_1(-12,\ 0)$일 때, 점 A_1은 $\frac{2}{3}$의 확률로 $A_2(-12,\ 2)$로 이동하거나, $\frac{1}{3}$의 확률로 $A_2(-12,\ 12)$로 이동한다.

(4) $m=3$, $n=2$인 경우

● 선분 OP를 $3:1$로 내분한 점은 $(9,\ 0)$이고, $1:3$로 외분한 점은 $(-6,\ 0)$이다. 즉, 점 A는 $\frac{1}{3}$의 확률로 $A_1(9,\ 0)$으로 이동하거나, $\frac{2}{3}$의 확률로 $A_1(-6,\ 0)$으로 이동한다.

● 점 $A_1(9,\ 0)$일 때, 선분 A_1Q를 $1:2$로 내분한 점은 $\left(9,\ \frac{8}{3}\right)$이고, $2:1$로 외분한 점은 $(9,\ 16)$이다. 즉, 점 A_1은 1의 확률로 $A_2\left(9,\ \frac{8}{3}\right)$로 이동한다.

● 점 $A_1(-6,\ 0)$일 때, 점 A_1은 1의 확률로 $A_2\left(-6,\ \frac{8}{3}\right)$로 이동한다.

(5) 모든 경우를 고려하여 계산한 확률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

m, n	확률	$A_1(x_1, 0)$	확률	$A_2(x_1, y_1)$	확률	$A \to A_1 \to A_2$일 확률
$m=2$ $n=3$	$\frac{1}{2}$	$A_1(8, 0)$	$\frac{1}{2}$	$A_2(8, 2)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$
				$A_2(8, 12)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$
		$A_1(-12, 0)$	$\frac{1}{2}$	$A_2(-12, 2)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$
				$A_2(-12, 12)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$
$m=3$ $n=2$	$\frac{1}{2}$	$A_1(9, 0)$	$\frac{1}{3}$	$A_2\left(9, \frac{8}{3}\right)$	1	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$
				$A_2(9, 16)$	0	0
		$A_1(-6, 0)$	$\frac{2}{3}$	$A_2\left(-6, \frac{8}{3}\right)$	1	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$
				$A_2(-6, 16)$	0	0

(6) 두 점 A_2와 점 P 사이의 거리는 거리 공식을 통해서 다음과 같이 계산할 수 있고, $|x_1|$보다 작은 경우는 $A_2(8,\ 2)$와 $A_2\left(9,\ \frac{8}{3}\right)$이며 그때의 확률은 $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$이다.

※ 확률이 0인 $A_2(9,\ 16)$과 $A_2(-6,\ 16)$의 경우는 거리 계산에서 제외하였다.

$A_2(x_1, y_1)$	확률	$\lvert x_1\rvert$	점 A_2와 점 P 사이의 거리	$\lvert x_1\rvert >$ 거리
$A_2(8, 2)$	$\frac{1}{6}$	8	$\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$	O
$A_2(8, 12)$	$\frac{1}{12}$	8	$\sqrt{4^2+12^2}=\sqrt{160}$	X
$A_2(-12, 2)$	$\frac{1}{6}$	12	$\sqrt{24^2+2^2}=\sqrt{580}$	X
$A_2(-12, 12)$	$\frac{1}{12}$	12	$\sqrt{24^2+12^2}=\sqrt{720}$	X
$A_2\left(9, \frac{8}{3}\right)$	$\frac{1}{6}$	9	$\sqrt{3^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{145}{9}}$	O
$A_2\left(-6, \frac{8}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	6	$\sqrt{18^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\sqrt{324+\frac{64}{9}}$	X

(문제2)

1. 출제 의도

본 문제에서는 미적분의 핵심 개념인 미분과 적분의 의미를 이해하고 이를 활용하여 구체적인 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

(문제2-1) 도함수를 이용하여 함수의 최댓값을 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

(문제2-2) 좌표평면 위를 움직이는 점의 위치가 시간에 대한 함수로 주어질 때 점이 움직인 거리를 구하는 문제로 미분과 정적분의 개념을 이해하고 구체적인 계산을 수행할 수 있는지 평가한다.

2. 문항 해설

(문제2-1) 도함수를 이용하여 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 찾는 문제는 미분의 핵심적인 응용 주제이다. 정적분과 미분의 관계를 이용하여 주어진 함수의 도함수를 구하고, 이 도함수로부터 함수의 극대, 극소를 찾고, 도함수의 부호를 조사하여 함수가 증가하는 구간과 감소하는 구간을 조사하여 함수의 최댓값을 찾는 문제이다.

(문제2-2) 좌표평면 위를 움직이는 점의 위치가 시간에 대한 함수로 주어질 때 점이 움직인 거리를 구하는 문제는 미분과 적분의 개념을 이동 거리와 속력 사이의 관계에 적용하여 해결하는 중요 응용 문제이다. 이를 잘 이해하고 구체적으로 주어진 정적분에 치환적분을 적용하여 계산을 할 수 있는지 평가하는 문제이다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 2-1	$x=1.5$일 때 $f'(x)=0$인 것을 확인하면 +3점 $f(x)$의 증가, 감소 구간을 조사하여 $f(1)$이 최대라는 것을 보이면 +4점 $f(1)=\frac{32}{3}$를 구하면 +3점	10
문제 2-2	$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\frac{\sin t\,(10-\sin^2 t)}{\sqrt{3}\,(8+\sin^2 t)}$를 구하면 +5점 $u=\cos t$로 치환하여, $\int_{-1}^{1}\frac{9+u^2}{\sqrt{3}\,(9-u^2)}du$를 구하면 +5점 정적분을 $\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1\left(-1+\frac{3}{3-u}+\frac{3}{3+u}\right)du$ 형태로 정리한 후, 계산하여 정답 $\frac{2}{\sqrt{3}}(-1+3\ln 2)$를 얻으면 +5점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

4. 예시 답안

(문제2-1)

$f'(x)=(x^2+5)\left\{1-2\sin\left(\frac{\pi x}{x^2+5}\right)\right\}$이므로 $f(x)$는 $\frac{\pi x}{x^2+5}=\frac{\pi}{6}+2n\pi$, $\frac{\pi x}{x^2+5}=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$일 때 극값을 가질 수 있다.

하지만 $f'(0)\neq 0$이고, $x\neq 0$일 때 $\left|\frac{\pi x}{x^2+5}\right|=\frac{\pi}{|x|+\frac{5}{|x|}}\leq\frac{\pi}{2\sqrt{5}}<\frac{\pi}{4}$이므로, $\frac{\pi x}{x^2+5}=\frac{\pi}{6}$인 경우, 즉 $x=1.5$일 때 극값을 가진다.

도함수 $f'(x)$의 부호를 조사하기 위해, $g(x)=1-2\sin\left(\frac{\pi x}{x^2+5}\right)$라 정의하고 이 함수의 도함수 $g'(x)=2\cos\left(\frac{\pi x}{x^2+5}\right)\frac{\pi(x^2-5)}{(x^2+5)^2}$를 구한다. 이로부터 $g(x)$가 구간 $(-1,\ \sqrt{5})$에서 감소하고, 구간 $(\sqrt{5},\ 5)$에서는 증가한다는 것을 알 수 있다.

그런데 $g(1)=g(5)=0$이므로, 구간 $(-1,\ 1)$에서 $g(x)>0$이고 $f(x)$는 증가하며, 구간 $(1,\ 5)$에서는 $g(x)<0$이고 $f(x)$는 감소한다. 따라서 $x=1$일 때 $f(x)$는 최댓값을 가진다.

마지막으로 $(x^2+5)\sin\left(\frac{\pi x}{x^2+5}\right)$의 그래프의 형태를 생각해보면 정적분

$\int_{-1}^{1}(x^2+5)\sin\left(\frac{\pi x}{x^2+5}\right)dx=0$이라는 것을 알 수 있다.

따라서, 최댓값은 $f(1)=\int_{-1}^{1}(t^2+5)dt=\frac{32}{3}$이다.

(문제2-2)

x와 y를 t에 대해 미분하여

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{\sin t}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}\sin t\cos t}{8+\sin^2 t}\right)^2}$$
$$=\frac{\sin t}{\sqrt{3}(8+\sin^2 t)}\sqrt{(8+\sin^2 t)^2+36\cos^2 t}=\frac{\sin t(10-\sin^2 t)}{\sqrt{3}(8+\sin^2 t)}$$

를 구한다. 따라서 $u=\cos t$로 치환하여,

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{\pi}\frac{\sin t(9+\cos^2 t)}{\sqrt{3}(9-\cos^2 t)}=\int_{-1}^{1}\frac{9+u^2}{\sqrt{3}(9-u^2)}du=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{9+u^2}{9-u^2}du$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1\left(-1+\frac{3}{3-u}+\frac{3}{3+u}\right)du=\frac{2}{\sqrt{3}}(-1+3\ln 2)\qquad=-\frac{2}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}\ln 2$$

를 구한다.

(문제3)

1. 출제 의도

정적분을 하여 수열을 구하고 수열의 합을 구한다. 문제를 이해하여 함수를 구성하고 미분하여 최솟값을 구한다.

(문제3-1) 수열을 구하고 수열의 합을 구할 수 있는지 평가한다.

(문제3-2) 문제를 이해하여 함수를 구한다. 미분을 이용하여 구한 함수의 최솟값을 구할 수
있는지 평가한다.

2. 문항 해설

(문제3-1) 정적분을 하여 수열을 구하고 수열의 합을 구할 수 있는지 평가한다.

(문제3-2) 문제를 이해하여 함수를 구성하고 여러 가지 미분법을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 3-1	$a_n = n(n+1)$ 를 구하면 +5점 $\frac{1}{a_k} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ 을 이용하여 식의 값 $\frac{19899}{10000}$ 을 구하면 +5점	10
문제 3-2	$f(\theta)$ 를 미분하여 $\sin\theta - \cos\theta = 0$, $37(\sin\theta + \cos\theta) = 35(1 + \sin\theta\cos\theta)$ 를 구하면 +7점 $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 와 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ 를 구하면 +6점 함수값을 비교하여 최솟값 $7\sqrt{2}$ 을 구하면 +2점	15

4. 예시 답안

(문제3-1)

정적분하면 $a_n = \int_0^{\ln(n+1)} (2e^{x} - e^{x})\,dx = \left[e^{2x} - e^{x}\right]_0^{\ln(n+1)} = n(n+1)$이다.

$\frac{1}{a_k} = \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$이므로 주어진 식의 값은

$$\sum_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + 1\right)\frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) + \sum_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}\right) = \frac{9999}{10000} + \frac{99}{100} = \frac{19899}{10000}$$

이다.

(문제3-2)

함수 $f(\theta)$를 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}} = f(\theta) = \sqrt{74 - 70\cos\theta} + \sqrt{74 - 70\sin\theta}$라 하자.

$f'(\theta) = \frac{35\sin\theta}{\sqrt{74 - 70\cos\theta}} - \frac{35\cos\theta}{\sqrt{74 - 70\sin\theta}}$이므로 $f'(\theta) = 0$을 정리하면

$37(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 35(\sin^3\theta - \cos^3\theta) = 0$이다.

정리하면 $(\sin\theta - \cos\theta)(37(\sin\theta + \cos\theta) - 35(1 + \sin\theta\cos\theta)) = 0$이다.

$\sin\theta - \cos\theta = 0$일 때, $\theta = \frac{\pi}{4}$이고 $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

$37(\sin\theta + \cos\theta) = 35(1 + \sin\theta\cos\theta)$일 때, 제곱하고 $X = \sin\theta\cos\theta$로 써서 정리하면

$(25 \times 49)X^2 - 288X - 144 = (25X - 12)(49X + 12) = 0$이다.

범위가 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta\cos\theta = \frac{12}{25}$이다. $\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$와 연립하여 근을 구하면 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$를 만족하는 a와

$\sin\beta = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$을 만족하는 β가 있다.

$\theta = 0$, α, $\frac{\pi}{4}$, β, $\frac{\pi}{2}$에서 $\{f(\theta)\}^2$값을 계산하자.

$$\{f(0)\}^2 = \left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 = 78 + 4\sqrt{74},\ \{f(\alpha)\}^2 = \{f(\beta)\}^2 = 98$$

$\left\{f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 = 296 - 140\sqrt{2}$이다. 최솟값은 98이다.

(문제4)

1. 출제 의도

타원의 접선의 방정식과 정사영의 뜻을 활용할 수 있는지 평가한다.

(문제4-1) 타원의 접선의 방정식에 타원 외부의 점의 좌표를 대입하여 얻은 이차방정식의 근과 접선의 기울기를 이해하고 있는지를 평가한다.

(문제4-2) 한 평면 위의 도형과 이 도형을 다른 평면으로 정사영하여 얻은 도형의 넓이 사이의 관계를 이해하고 있는지 평가한다.

2. 문항 해설

(문제4-1) 타원의 접선의 방정식에 타원 외부의 점의 좌표를 대입하여 얻은 이차방정식의 근으로부터 접선의 기울기에 대한 조건을 유추해 낼 수 있는지를 평가한다. 이 과정에서 탄젠트함수의 덧셈정리를 활용할 수 있는지를 평가한다.

(문제4-2) 평면 외부에 놓인 삼각형을 다른 평면으로 정사영하여 얻은 삼각형과 원래 삼각형의 사이의 기하학적 관계를 주어진 선과 면의 조건으로 구할 수 있는지 평가한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 4-1	접선을 $y = mx \pm \sqrt{m^2+2}$ 라 놓고, $(k^2-1)m^2 - 2\sqrt{3}km + 1 = 0$를 얻으면 +5점 두 접선이 x축과 이루는 각을 α, β라 놓고, $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{2\sqrt{3}k}{k^2-1}$ 과 $\tan\alpha\tan\beta = \dfrac{1}{k^2-1}$ 을 얻으면 +5점 $k^2 = 4+2\sqrt{5}$를 구하면 +5점	15
문제 4-2	$\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{21}$ 를 구하면 +5점 삼각형 A'B'C'의 넓이 $3\sqrt{3}$ 을 구하면 +5점 그림자의 넓이 $2(11-4\sqrt{7})\pi$를 구하면 +5점 (그림자의 넓이를 $\dfrac{18\pi}{11+4\sqrt{7}}$ 로 구해도 +5점)	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

4. 예시 답안

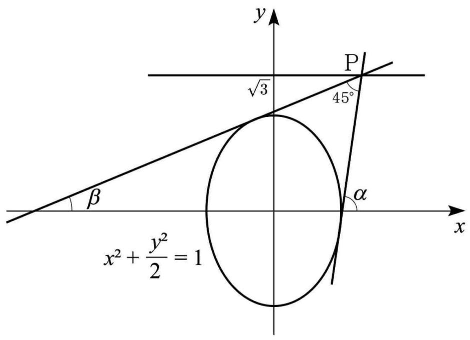
(문제4-1)

$k=\pm 1$인 경우, 두 접선이 이루는 각이 45°가 아님을 쉽게 알 수 있다. 따라서 $k \neq \pm 1$이라 가정할 수 있다. 접선을 $y = mx \pm \sqrt{m^2+2}$라 놓자. 접선이 점 $\mathrm{P}(k,\ \sqrt{3})$을 지나므로 대입하여 정리하여 m에 대한 이차방정식 $(k^2-1)m^2 - 2\sqrt{3}km + 1 = 0$을 얻는다. 아래 그림과 같이 두 접선이 x축과 이루는 각을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha > \beta)$라 하면 $\tan\alpha,\ \tan\beta$는 이 이차방정식의 두 근이고, 근과 계수의 관계에 의하여 $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{2\sqrt{3}k}{k^2-1}$과 $\tan\alpha\tan\beta = \dfrac{1}{k^2-1}$이다. $\alpha - \beta = 45^\circ$이므로

$$1 = \tan^2(\alpha-\beta) = \left(\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right)^2$$

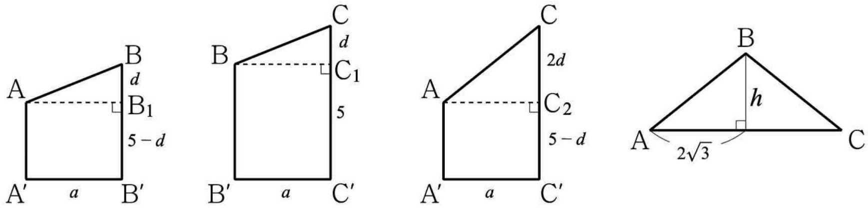
$$= \frac{(\tan\alpha+\tan\beta)^2 - 4\tan\alpha\tan\beta}{(1+\tan\alpha\tan\beta)^2} = \frac{\left(\dfrac{2\sqrt{3}k}{k^2-1}\right)^2 - \dfrac{4}{k^2-1}}{\left(1+\dfrac{1}{k^2-1}\right)^2}$$

정리하여 방정식 $(k^2)^2 - 8k^2 - 4 = 0$을 얻는다. $k^2 > 0$이므로 $k^2 = 4+2\sqrt{5}$이다.



(문제4-2)

$\overline{AA'}=5-d$, $\overline{BB'}=5$, $\overline{CC'}=5+d$라 하고, 정삼각형 $A'B'C'$의 한 변의 길이를 a라 하자.
아래 그림과 같이 점 B_1, C_1, C_2를 선분 BB' 또는 CC' 위에서 잡자.



직각삼각형 AB_1B, BC_1C에서 $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{a^2+d^2}$이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다. 위 그림과 같이 점 B와 선분 AC 사이의 거리를 h라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 $6\sqrt{3}$이므로 $h=3$이고 $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{21}$이다.
직각삼각형 AB_1B와 AC_2C에서 $a^2+d^2=21$, $a^2+4d^2=48$이므로 $a=2\sqrt{3}$ $(d=\pm 3)$을 얻는다. 따라서 삼각형 $A'B'C'$의 넓이는 $3\sqrt{3}$이고, 평면 ABC와 평면 α가 이루는 각을 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{1}{2}$이다. 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하고 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 $\frac{1}{2}(4\sqrt{3}+2\sqrt{21})r=S=6\sqrt{3}$이므로 $r=2(\sqrt{7}-2)$을 얻는다.
삼각형 ABC의 내접원의 그림자의 넓이는

$$\pi r^2\cos\theta=\frac{1}{2}\pi r^2=2(11-4\sqrt{7})\pi$$

이다.