세종대학교 24 수시 자연A

(문제1) 실수 전체의 집합에서 다음과 같이 정의되는 함수 $f(x)$에 대하여 아래 물음에 각각 답하시오. (단, n은 자연수이다.)

$$f(x)=\begin{cases} -\displaystyle\int_0^x \frac{(t+3)(t+1)}{(n+3)(n+1)}dt & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x \left\{\frac{t^3}{n^3}-\frac{(t+3)(t+1)}{(n+3)(n+1)}\right\}dt & (x\geq 0) \end{cases}$$

(1-1) $x<0$일 때 $f(x)$의 극솟값을 구하시오. (70점)

(1-2) 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하시오. (80점)

(1-3) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 접선의 기울기가 0인 점을 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 내각 중에서 가장 큰 각의 크기를 θ_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\tan\theta_n$을 구하시오. (80점)

해병수학 수리논술

(문제2) 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=f(x)$는 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 직선 $y=2x+1$에 접한다. (단, $a<b$)
> (나) 두 점 A와 B 사이의 거리는 $\sqrt{5}$이다.
> (다) $f'(c)=2$를 만족시키는 $c\ (a<c<b)$에 대하여, $a+b+c=\dfrac{3}{2}$이다.

(2-1) c의 값을 구하시오. (70점)

(2-2) $a<x<c$에서 $f(x)$의 역함수가 존재함을 보이고, $f(a)<x<f(c)$인 x에 대하여 $(f^{-1})'(x)$의 최솟값을 구하시오. (80점)

(2-3) 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 변곡점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$를 지나는 직선의 방정식을 $y=L(x)$라 하고, $y=f(x)$와 $y=L(x)$의 교점의 x좌표의 최댓값을 k라 하자. 이때, 점 $\mathrm{P}(k+2f(k),\ 0)$과 곡선 $y=\dfrac{1}{2}\{f(x)+L(x)+|f(x)-L(x)|\}$ 위의 점 Q에 대하여, 선분 PQ의 길이가 최소가 되도록 하는 점 Q의 x좌표를 구하시오. (80점)

(문제3) 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\int_0^x te^{-(t-x)^2}dt$에 대하여 $\int_0^2 e^{-x^2}dx = A$라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(3-1) $f'(2)$를 A의 식으로 나타내시오. (80점)

(3-2) $0 < x \le 2$에서 함수 $\frac{f(x)}{x}$의 최댓값을 A의 식으로 나타내시오. (80점)

(3-3) $\lim_{x \to 0} \frac{\{f(x)\}^5 f'(x)}{x^{11}}$의 값을 구하시오. (80점)

(논제 해결)

(문제 1)

1. 출제 의도

함수의 극값을 구하고 극한을 계산할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항 해설

적분으로 주어진 함수의 극값을 구하고 탄젠트의 극한을 계산한다.

3. 채점 기준

(선행학습 평가 기준)

4. 예시 답안

(1-1)

$x<0$일 때 $f'(x)=-\dfrac{(x+3)(x+1)}{(n+3)(n+1)}$이므로 다음과 같은 증감표를 얻는다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	0

그러므로 $f(x)$는 $x=-3$에서 다음과 같은 극솟값을 가진다.

$$f(-3)=-\int_0^{-3}\frac{(t+3)(t+1)}{(n+3)(n+1)}dt=-\frac{1}{(n+3)(n+1)}\left[\frac{1}{3}t^3+2t^2+3t\right]_0^{-3}=0$$

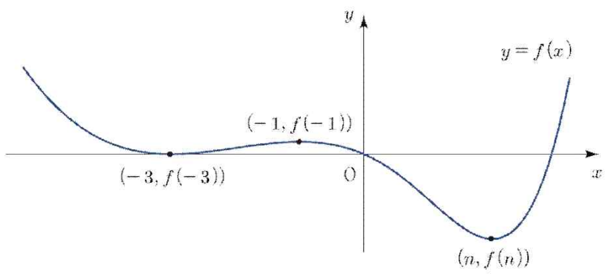
(1-2)

$x<0$에서 $f(x)$는 극솟값 $f(-3)=0$과 극댓값 $f(-1)$을 가지며 $f(0)=0$이므로 그래프의 개형을 생각하면 $x\le 0$일 때 $f(x)\ge 0$이다. 한편 $x>0$에서는

$$f'(x)=\frac{x^3}{n^3}-\frac{(x+3)(x+1)}{(n+3)(n+1)}=\frac{(x-n)\{(n^2+4n+3)x^2+(4n^2+3n)x+3n^2\}}{n^3(n+3)(n+1)}$$

이고, 자연수 n과 양수 x에 대하여 $\dfrac{(n^2+4n+3)x^2+(4n^2+3n)x+3n^2}{n^3(n+3)(n+1)}>0$인 것이 자명하므로 $x>0$에서 $f'(x)=0$의 해는 $x=n$이 유일하다.

또한 $0<x<n$일 때 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소하고, $x>n$일 때 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다. 그러므로 $f(x)$는 $x=n$에서 극솟값을 가진다. 따라서 실수 전체의 영역에서의 그래프의 개형을 생각하면 다음과 같다.



그러므로 $f(x)$의 최솟값을 $f(n)=\displaystyle\int_0^n\left\{\frac{t^3}{n^3}-\frac{(t+3)(t+1)}{(n+3)(n+1)}\right\}dt=-\frac{n(n+9)}{12(n+1)}$이다.

(1-3)

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 접선의 기울기가 0인 점은 방정식 $f'(x)=0$을 풀면 얻을 수 있다. (1-1)의 풀이에서 $x<0$일 때 방정식 $f'(x)=0$을 풀면 $x=-3$ 또는 $x=-1$이다.

$$f(-1)=-\int_0^{-1}\frac{(t+3)(t+1)}{(n+3)(n+1)}dt=-\frac{1}{(n+3)(n+1)}\left[\frac{1}{3}t^3+2t^2+3t\right]_0^{-1}=\frac{4}{3(n+3)(n+1)}$$

이다. (1-2)의 풀이에서 $x>0$에서 방정식 $f'(x)=0$을 풀면 $x=n$이다. 한편

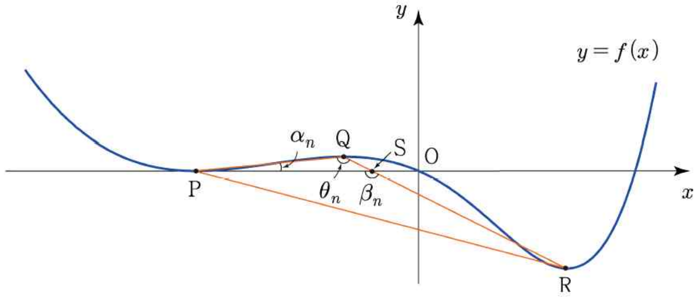
$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\frac{3}{(n+3)(n+1)}\ne 0$$

이므로 접선의 기울기가 0인 세 점은 다음과 같다.

$\mathrm{P}(-3,0)$, $\mathrm{Q}(-1,f(-1))$, $\mathrm{R}(n,f(n))$

또한, 두 점 Q와 R을 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 S라 두고

$\alpha_n = \angle \mathrm{QPS}$, $\beta_n = \angle \mathrm{PSR}$이라 하자. (아래 그림 참조)



이때 $\tan\alpha_n = \dfrac{2}{3(n+1)(n+3)}$이고 $\tan\beta_n = \dfrac{f(n)-f(-1)}{n+1} = -\dfrac{n(n+3)(n+9)+16}{12(n+3)(n+1)^2}$이므로

$$\begin{aligned}\tan(\angle \mathrm{PQR}) &= \tan(\beta_n - \alpha_n)\\ &= \frac{\tan\beta_n - \tan\alpha_n}{1+\tan\beta_n\tan\alpha_n}\\ &= \frac{-\dfrac{n(n+3)(n+9)+16}{12(n+3)(n+1)^2} - \dfrac{2}{3(n+1)(n+3)}}{1-\dfrac{n(n+3)(n+9)+16}{12(n+3)(n+1)^2}\times\dfrac{2}{3(n+1)(n+3)}} < 0\end{aligned}$$

이다. 따라서 $\angle \mathrm{PQR}$이 둔각이므로 $\theta_n = \angle \mathrm{PQR}$이다. 그러므로 다음을 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}\tan\theta_n = \lim_{n\to\infty}\tan(\angle \mathrm{PQR}) = -\frac{1}{12}$$

(참고)

$f(-1) = \dfrac{4}{3(n+3)(n+1)}$, $f(n) = -\dfrac{n(n+9)}{12(n+1)}$이고

$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = 4+\{f(-1)\}^2$, $\overline{\mathrm{QR}}^2 = (n+1)^2+\{f(-1)-f(n)\}^2$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{PQ}} < \overline{\mathrm{QR}}$이다.

또한 $\overline{\mathrm{PR}}^2 = (n+3)^2+\{f(n)\}^2$이므로

$$\overline{\mathrm{PR}}^2 - \overline{\mathrm{QR}}^2 = 4n+8+2f(-1)f(n)-\{f(-1)\}^2 = 4n+8-\frac{2(n^3+12n^2+27n+8)}{9(n^4+8n^3+22n^2+24n+9)}$$

이다. 그런데 $\dfrac{n^3+12n^2+27n+8}{n^4+8n^3+22n^2+24n+9} < 1$이므로 $\overline{\mathrm{PR}} > \overline{\mathrm{QR}}$이다.

따라서 삼각형 PQR에서 가장 길이가 긴 변은 $\overline{\mathrm{PR}}$이고, $\theta_n = \angle \mathrm{PQR}$이다.

(별해)

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 접선의 기울기가 0이 점은 방정식 $f'(x)=0$을 풀면 얻을 수 있다. (1-1)의 풀이에서 $x<0$일 때 방정식 $f'(x)=0$을 풀면 $x=-3$ 또는 $x=-1$이다.

$$f(-1) = -\int_0^{-1}\frac{(t+3)(t+1)}{(n+3)(n+1)}dt = -\frac{1}{(n+3)(n+1)}\left[\frac{1}{3}t^3+2t^2+3t\right]_0^{-1} = \frac{4}{3(n+3)(n+1)}$$

이다. (1-2)의 풀이에서 $x>0$에서 방정식 $f'(x)=0$을 풀면 $x=n$이다. 한편

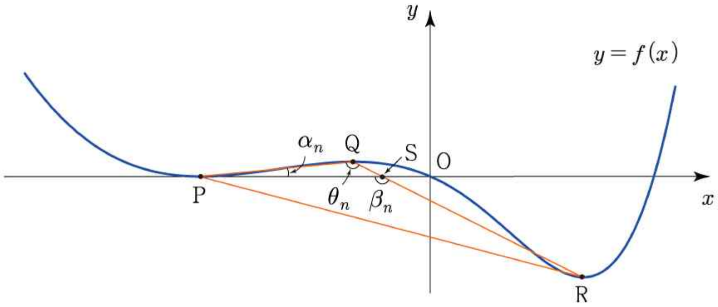
$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{3}{(n+3)(n+1)} \neq 0$$

이므로 접선의 기울기가 0인 세 점은 다음과 같다.

$\mathrm{P}(-3,0)$, $\mathrm{Q}(-1,f(-1))$, $\mathrm{R}(n,f(n))$

또한, 두 점 Q와 R을 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 S라 두고

$\alpha_n = \angle \mathrm{QPS}$, $\beta_n = \angle \mathrm{PSR}$이라 하자. (아래 그림 참조)



이때

$$0 < \tan\alpha_n = \frac{2}{3(n+1)(n+3)} < 1$$

이므로 $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{4}$이고,

$$-1 < \tan\beta_n = -\frac{n^2+11n+16}{12n^2+48n+36} < 0$$

이므로 $\frac{3\pi}{4} < \beta_n < \pi$이다. 그러므로 $\frac{\pi}{2} < \angle\mathrm{PQR} = \beta_n - \alpha_n < \pi$이다.

따라서 $\angle\mathrm{PQR}$이 둔각이므로 $\theta_n = \angle\mathrm{PQR}$이다.

또한 $\lim_{n\to\infty} f(-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3(n+1)(n+3)} = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\tan\theta_n &= \lim_{n\to\infty}\tan(\angle\mathrm{PQR})\\ &= \lim_{n\to\infty}\tan(\beta_n-\alpha_n)\\ &= \tan\left(\lim_{n\to\infty}(\beta_n-\alpha_n)\right)\\ &= \tan\left(\lim_{n\to\infty}\beta_n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\tan\beta_n\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-f(-1)}{n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{n(n+3)(n+9)+16}{12(n+3)(n+1)^2}\right\} = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

이다.

(문제 2)

1. 출제 의도

변곡점과 역함수의 미분법을 이해하고 응용할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항 해설

변곡점을 찾고 역함수의 미분법을 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

3. 채점 기준

(선행학습 평가 기준)

4. 예시 답안

(2-1)

조건 (가)로부터 $f(x) = 2x+1+(x-a)^2(x-b)^2$으로 쓸 수 있다. 이로부터

$$2 = f'(c) = 2+2(c-a)(c-b)(2c-a-b)$$

를 얻고, $c = \frac{a+b}{2}$가 된다. 조건 (나)로부터

$$5 = (b-a)^2 + \{f(b)-f(a)\}^2 = (b-a)^2 + \{2(b-a)\}^2 = 5(b-a)^2$$

을 얻는다. 따라서 $b = a+1$이다. 또한 조건 (다)로부터

$$\frac{3}{2} = a+b+c = a+a+1+\frac{a+a+1}{2} = 3a+\frac{3}{2}$$

이므로 $a=0$, $b=1$이고, $c=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{1}{2}$이다.

(2-2)

$f(x)=x^2(x-1)^2+2x+1$, $f'(x)=4x^3-6x^2+2x+2$, $f''(x)=2(6x^2-6x+1)$이다. 따라서 $0(=a)<x<\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$일 때 $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가하고, $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}<x<\dfrac{1}{2}(=c)$일 때 $f''(x)<0$이므로 $f'(x)$는 감소한다. 또한 $f'(0)=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$이므로 $a<x<c$일 때 $f'(x)>0$이다. 그러므로 $f(x)$는 $a<x<c$일 때 증가함수가 되어 역함수를 가진다.

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$로부터 $f(a)<x<f(c)$인 x에 대하여 $(f^{-1})'(x)$의 최솟값은

$0(=a)<t<\dfrac{1}{2}(=c)$에서 $f'(t)$가 최대일 때이다. $f'(t)$의 최댓값은 $f''(t)=0$을 만족시키는 $t=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$일 때 생긴다. 따라서 $f'(t)$의 최댓값은

$f'\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)=\dfrac{18+\sqrt{3}}{9}$이고, 답은

$\dfrac{9}{18+\sqrt{3}}=\dfrac{3}{107}(18-\sqrt{3})$이다.

(2-3)

$f(x)=x^2(x-1)^2+2x+1$, $f'(x)=4x^3-6x^2+2x+2$, $f''(x)=2(6x^2-6x+1)$이다. 따라서

$0(=a)<x<\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$일 때 $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가하고, $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}<x<\dfrac{1}{2}(=c)$일 때 $f''(x)<0$이므로 $f'(x)$는 감소한다. 또한

$f'(0)=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$이므로 $a<x<c$일 때 $f'(x)>0$이다. 그러므로 $f(x)$는 $a<x<c$일 때 증가함수가 되어 역함수를 가진다.

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$로부터 $f(a)<x<f(c)$인 x에 대하여 $(f^{-1})'(x)$의 최솟값은

$0(=a)<t<\dfrac{1}{2}(=c)$에서 $f'(t)$가 최대일 때이다. $f'(t)$의 최댓값은 $f''(t)=0$을 만족시키는 $t=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$일 때 생긴다. 따라서 $f'(t)$의 최댓값은

$f'\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)=\dfrac{18+\sqrt{3}}{9}$이고, 답은 $\dfrac{9}{18+\sqrt{3}}=\dfrac{3}{107}(18-\sqrt{3})$이다.

(2-3) 방정식 $f''(x)=2(6x^2-6x+1)=0$의 두 근이 α, β이므로 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=\dfrac{1}{6}$이다.

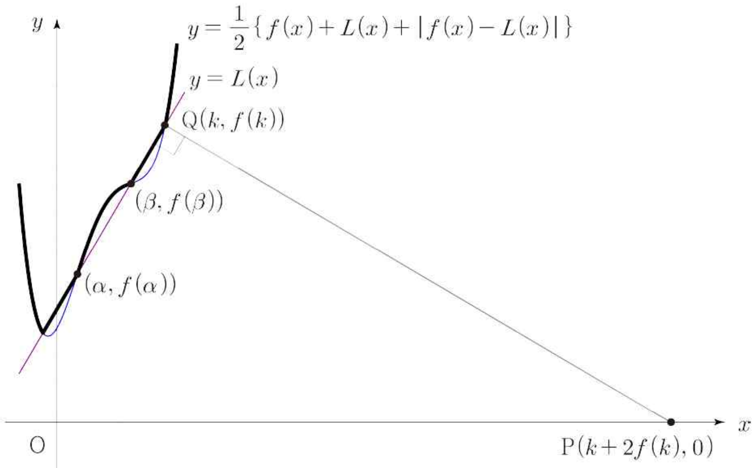
그런데 $f(x)=x^4-2x^3+x^2+2x+1$이므로 직선 $y=L(x)$의 기울기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}&=\frac{\beta^4-\alpha^4-2(\beta^3-\alpha^3)+(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\\&=(\beta+\alpha)(\beta^2+\alpha^2)-2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)+\beta+\alpha+2\\&=-(\alpha+\beta)^2+\alpha+\beta+2\\&=2\end{aligned}$$

또한, 점 $(k, f(k))$와 점 $(k+2f(k), 0)$을 지나는 직선의 기울기는 $-\dfrac{f(k)}{2f(k)}=-\dfrac{1}{2}$이므로 이 직선은 직선 $y=L(x)$와 수직이다. 그런데

$$\frac{1}{2}\{f(x)+L(x)+|f(x)-L(x)|\}=\begin{cases}f(x) & (f(x)\geq L(x)\text{일 때})\\ L(x) & (L(x)\geq f(x)\text{일 때})\end{cases}$$

이므로 곡선 $y=\dfrac{1}{2}\{f(x)+L(x)+|f(x)-L(x)|\}$는 아래 그림에서 두껍게 표시된 부분이다. (단, $\alpha<\beta$라 하자.)



그러므로 선분 PQ의 길이가 최소가 되도록 하는 점 Q는 $(k, f(k))$이다. 방정식 $f(x)=L(x)$로부터

$$x^2(x-1)^2+2x+1=2(x-\alpha)+f(\alpha)=2(x-\alpha)+\alpha^2(\alpha-1)^2+2\alpha+1$$

을 얻고, 이를 정리하면 $x^2(x-1)^2=\alpha^2(\alpha-1)^2$이다.

이제 $\alpha(\alpha-1)=-\alpha\beta=-\frac{1}{6}$임을 이용하여 인수분해하면

$$\{x^2-x-\alpha(\alpha-1)\}\{x^2-x+\alpha(\alpha-1)\}=\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\left(x^2-x-\frac{1}{6}\right)=0$$

이며, 이 방정식의 근을 모두 구하면 $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{6}$, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{6}$이고, 이 중에서 가장 큰 것이 k이므로 $k=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{6}$이다.

(참고)

$f(x)=x^2(x-1)^2+2x+1$이고 $\alpha+\beta=1$이므로 직선 $y=L(x)$의 기울기를 다음과 같이 계산할 수도 있다.

$$\begin{aligned}\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}&=\frac{\beta^2(\beta-1)^2+2\beta-\alpha^2(\alpha-1)^2-2\alpha}{\beta-\alpha}\\&=\frac{\{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)\}\{\beta(\beta-1)-\alpha(\alpha-1)+2(\beta-\alpha)\}}{\beta-\alpha}\\&=\frac{\{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)\}\{\beta^2-\alpha^2-(\beta-\alpha)\}+2(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\\&=\{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)\}\{\beta+\alpha-1\}+2\\&=0+2\\&=2\end{aligned}$$

(별해)

$g(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+L(x)+|f(x)-L(x)|\}$라 하면

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (f(x)\geq L(x)\text{일 때})\\ L(x) & (L(x)\geq f(x)\text{일 때})\end{cases}$$

이다. 따라서 점 P와 직선 $y=L(x)$ 위의 점 R에 대하여 선분 PR의 길이가 최소가 되도록 하는 점 R의 x좌표를 d라고 할 때, $L(d)\geq f(d)$이면 (즉 $g(d)=L(d)$이면) d가 구하는 점 Q의 x좌표가 된다.

방정식 $f''(x)=2(6x^2-6x+1)=0$의 두 근이 α, β이므로 $\alpha<\beta$임을 가정하면

$\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$, $\beta=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}$이다. 따라서 $f(x)=2x+1+x^2(x-1)^2$에서

$$f(\alpha)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+1+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=2-\frac{\sqrt{3}}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)^2=2+\frac{1}{36}-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f(\beta)=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=2+\frac{\sqrt{3}}{3}+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\right)^2=2+\frac{1}{36}+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이다. 즉

$$L(x)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)=2\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+2+\frac{1}{36}-\frac{\sqrt{3}}{3}=2x+1+\frac{1}{36}$$

이 된다. 따라서

$$f(x)=L(x) \Leftrightarrow x^2(x-1)^2=\frac{1}{36} \Leftrightarrow \left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\left(x^2-x-\frac{1}{6}\right)=0$$

이므로, k는 위의 방정식의 가장 큰 근이 되어 $k=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{6}$이다.

이제 선분 PR의 길이가 최소가 되도록 하는 점 $\mathrm{R}(d,\ L(d))$를 구해보자.

직선 PR과 직선 $y=L(x)$가 수직이어야 하므로 직선 PR의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. 따라서

$$\frac{L(d)}{d-k-2f(k)}=-\frac{1}{2}$$

를 만족한다. 한편 $f(k)=L(k)$이므로 이 방정식을 정리하면

$$d+2L(d)=k+2L(k)$$

가 얻어진다. 즉,

$$d+4d+\frac{37}{18}=k+4k+\frac{37}{18}$$

이므로 $d=k$이다. 이때 $g(d)=L(d)$이므로, 구하는 점 Q의 x좌표는 $k=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{6}$이다.

(문제3)

1. 출제 의도

적분과 미분의 관계식을 이용하고 응요할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항 해설

적분과 미분의 관계를 이해하고 이를 활용하여 함수의 극한과 최댓값을 계산한다.

3. 채점 기준

(선행학습 평가 참조)

4. 예시 답안

(3-1)

$u=t-x$라 두면 $t=x+u$이므로 치환적분법을 이용하면

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_0^x te^{-(t-x)^2}dt \\ &=\int_{-x}^0 (x+u)e^{-u^2}du \\ &=x\int_{-x}^0 e^{-u^2}du-\frac{1}{2}\int_{-x}^0(-2u)e^{-u^2}du \\ &=x\int_{-x}^0 e^{-u^2}du-\frac{1}{2}\left[e^{-u^2}\right]_{-x}^0 \\ &=x\int_0^x e^{-u^2}du-\frac{1}{2}\left(1-e^{-x^2}\right) \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$f'(x)=\int_0^x e^{-u^2}du+xe^{-x^2}+\frac{1}{2}e^{-x^2}(-2x)=\int_0^x e^{-u^2}du$$

이다. 따라서 $f'(2)=A$이다.

(3-2)

두 식

$$f(x)=x\int_0^x e^{-u^2}du-\frac{1}{2}\left(1-e^{-x^2}\right)$$

$$f'(x)=\int_0^x e^{-u^2}du$$

로부터 $f(x)=xf'(x)-\frac{1}{2}\left(1-e^{-x^2}\right)$을 얻는다. 따라서 $0<x\le 2$일 때

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}=\frac{1}{2x^2}\left(1-e^{-x^2}\right)>0$$

이므로 $\frac{f(x)}{x}$는 이 구간에서 증가한다. 따라서 $0<x\le 2$일 때 $\frac{f(x)}{x}$의 최댓값은 $\frac{f(2)}{2}$이고, 식 $f(x)=x\int_0^x e^{-u^2}du-\frac{1}{2}\left(1-e^{-x^2}\right)$으로부터 $\frac{f(2)}{2}=A-\frac{1}{4}\left(1-e^{-4}\right)$이다.

(3-3)

$f(x)=x\int_0^x e^{-u^2}du-\frac{1}{2}\left(1-e^{-x^2}\right)$이고, $f'(x)=\int_0^x e^{-u^2}du$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-\frac{1}{2}\left(1-e^{-x^2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f'(x)}{x}-\frac{\frac{1}{2}\left(1-e^{-x^2}\right)}{x^2}\right\}$$

이다. $f'(0)=0$, $f''(x)=e^{-x^2}$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)=1$$

이고

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left(1-e^{-x^2}\right)}{x^2}=\lim_{t\to 0-}\frac{\frac{1}{2}\left(e^t-1\right)}{t}=\frac{1}{2}\quad(\Leftarrow t=-x^2)$$

이다. 따라서 $\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^5 f'(x)}{x^{11}}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{x^2}\right\}^5\times\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\frac{1}{32}$이다.