경희대학교 24 수시 자연계

(문제) 제시문을 읽고 다음 질문에 답하시오.

[가] 두 직선 $l: y=mx+n$, $l': y=m'x+n'$에 대하여 l과 l'이 서로 수직이면 $mm'=-1$이다.
거꾸로 $mm'=-1$이면 l과 l'이 서로 수직이다.

[나] 첫째항이 a $(a \neq 0)$이고 공비가 r인 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

[논제 I] 좌표평면 위의 원점 $\mathrm{O}(0,0)$과 두 점 $\mathrm{P}_1(8,0)$, $\mathrm{Q}_1(0,4)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$의 수직이등분선이 쌍곡선 $x^2-y^2=b$와 접한다고 한다. 이때 b의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (12점)

(2) 두 점 P_1, Q_1에 대하여 직각삼각형 $\mathrm{OP}_1\mathrm{Q}_1$을 만든다. 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$의 수직이등분선이 x축, y축과 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2라 하고 직각삼각형 $\mathrm{OP}_2\mathrm{Q}_2$를 만든다. 선분 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$의 수직이등분선이 x축, y축과 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3라 하고 직각삼각형 $\mathrm{OP}_3\mathrm{Q}_3$를 만든다. 선분 $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$의 수직이등분선이 x축, y축과 만나는 두 점을 각각 P_4, Q_4라 하고 직각삼각형 $\mathrm{OP}_4\mathrm{Q}_4$를 만든다. 이와 같은 과정을 계속하여 직각삼각형 $\mathrm{OP}_5\mathrm{Q}_5$, $\mathrm{OP}_6\mathrm{Q}_6$, $\mathrm{OP}_7\mathrm{Q}_7$, $\cdots$을 만든다. 이때, 빗변의 중점이 제1사분면에 있는 직각삼각형의 넓이의 합을 A_1, 빗변의 중점이 제2사분면에 있는 직각삼각형의 넓이의 합을 A_2, 빗변의 중점이 제3사분면에 있는 직각삼각형의 넓이의 합을 A_3, 빗변의 중점이 제4사분면에 있는 직각삼각형의 넓이의 합을 A_4라 하자. 다음 명제의 참, 거짓을 판별하고 그 근거를 논술하시오. (18점)

명제 : A_1은 $A_2+A_3+A_4$보다 크다.

[다] 서로 다른 n개에서 r $(0 < r \leq n)$개를 택하는 조합의 수는

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

[라] 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

[논제II] 동전 한 개를 반복하여 19번 던졌을 때, 앞면이 16번, 뒷면이 3번 나왔다고 한다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 뒷면이 연속해서 나오지 않는 경우의 수를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (12점)

(2) 앞면은 항상 두 번 이상 연속해서 나오고 뒷면은 연속해서 나오지 않는 경우의 수를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (21점)

[마] 좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

[바] 평면 β 위의 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라고 하면

$$S' = S\cos\theta$$

[논제III] 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 위에 두 점 $A(0, 0, 2)$, $P(a, a, b)$가 있다. xy평면 위의 점 Q에 대하여 점 P가 선분 AQ를 $1:4$로 내분할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a, b는 양수이다.)

(1) 점 P와 점 Q의 좌표를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) 점 A와 점 P가 아닌 구 위의 점 R에 대하여 삼각형 ARQ의 xy평면 위로의 정사영을 F라 하고 삼각형 ARQ와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. F의 넓이가 최대가 될 때, 삼각형 ARQ의 세 변의 길이와 $\cos\theta$의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (27점)

(논제 해결)

1. 출제 의도

[논제Ⅰ]에서는 고등학교 교육과정의 직선의 방정식, 이차곡선, 등비급수 등을 종합적으로 잘 이해하고 응용할 수 있는지를 파악할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 조건으로부터 수학적으로 추론하고 단순한 공식의 적용보다는 주어진 상황을 수학적으로 표현하여 문제 해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

[논제Ⅱ]에서는 고등학교 수학 교육과정 수학 및 확률과 통계 영역에서 경우의 수, 순열, 조합, 중복조합 등의 중요한 개념을 잘 이해하여 종합적으로 문제에 적용할 수 있는지를 평가할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 상황에서 수학의 이론과 개념을 활용하여 문제 해결 방법을 수립하고 최적의 해결 전략을 고려할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 또한, 주어진 조건으로부터 수학적으로 추론하고 단순한 공식의 적용보다는 주어진 상황을 수학적으로 표현하여 문제해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

[논제Ⅲ]에서는 고등학교 교육과정의 공간도형과 공간좌표의 성질들을 이해하고 응용할 수 있는 논제를 출제하였다. 단순히 공식을 암기하여 해결하는 것이 아닌, 공간상의 상황을 파악하고 이를 기본적인 개념들을 이용하여 문제를 해결하는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 문항 해설

[논제Ⅰ]에서는 이차곡선의 접선, 등비급수 등을 이용하여 제시된 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다. 주어진 직선과 곡선이 언제 서로 접하게 되는지 추론하도록 하고, 등비급수를 활용하여 주어진 문제를 해결하도록 하였다.

[논제Ⅱ]에서는 경우의 수, 순열, 조합, 중복조합 등의 개념을 이해하고 주어진 상황에서의 확률을 계산할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

[논제Ⅲ]에서는 고등학교 기하 교육과정 중 구의 방정식, 공간좌표에서의 내분점, 공간도형의 정사영 등 기본 개념을 잘 이해하고 이를 응용할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

3. 모범 답안

(논제Ⅰ)

(1)

선분 $\mathrm{P_1Q_1}$의 수직이등분선을 m이라 하자. 선분 $\mathrm{P_1Q_1}$의 중점의 좌표는 $(4,\ 2)$이고 직선 $\mathrm{P_1Q_1}$의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 m의 기울기는 2이다.

따라서 직선 m의 방정식은 $y=2x-6$이다. 한편 쌍곡선 $x^2-y^2=b$와 직선 m이 접하려면 이차방정식 $x^2-(2x-6)^2=b$, 즉 $3x^2-24x+36+b=0$의 판별식이 0이어야 한다.

따라서 $\frac{D}{4}=12^2-3\times(36+b)=0$이므로 $b=12$이다.

(2)

P_n과 Q_n을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 직선 l_2는 (1)에서 구한 직선 m이고 x축과 $\mathrm{P}_2(3,\ 0)$, y축과 $\mathrm{Q}_2(0,\ -6)$에서 만난다. 직선 l_3는 선분 $\mathrm{P_2Q_2}$의 수직이등분선이므로 점 $\left(\frac{3}{2},\ -3\right)$을 지나고 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. 따라서 직선 l_3의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{9}{4}$이고 x축과 $\mathrm{P}_3\left(-\frac{9}{2},\ 0\right)$, y축과 $\mathrm{Q}_3\left(0,\ -\frac{9}{4}\right)$에서 만난다.

이제 직각삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이를 S_n이라 하면 $S_1=16$, $S_2=9$, $S_3=\frac{81}{16}$이다. 직각삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$들은 모두 서로 닮음이고, 연속하여 만들어지는 직각삼각형의 닮음비는 $\frac{3}{4}$이므로 넓이의 비는 $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$이다. 따라서 S_4는 $\frac{729}{256}$이다. A_1은 첫째항이 $S_1=16$이고 공비가 $\left(\frac{9}{16}\right)^4$인 등비급수의 합이다. 마찬가지로 A_4는 첫째항이 $S_2=9$이고 공비가 $\left(\frac{9}{16}\right)^4$인 등비급수의 합, A_3은 첫째항이 $S_3=\frac{81}{16}$이고 공비가 $\left(\frac{9}{16}\right)^4$인 등비급수의 합, A_2은 첫째항이 $S_4=\frac{729}{256}$이고 공비가 $\left(\frac{9}{16}\right)^4$인 등비급수의 합이다. 따라서 A_1과 $A_2+A_3+A_4$의 대소관계를 비교하기 위해, S_1과 $S_2+S_3+S_4$의 대소관계를 비교하면,

$$S_1=16<9+\frac{81}{16}+\frac{729}{256}=S_2+S_3+S_4$$

따라서 $A_1<A_2+A_3+A_4$이고 주어진 명제는 거짓이다.

(논제II)

(1)

앞면을 H, 뒷면을 T라고 하자. 아래와 같이 앞면이 나온 동전 16개를 먼저 배열하고 첫 번째 H의 앞, 이웃한 두 H의 사이, 16번째 H의 뒤에 17개의 O표시를 하자.

$$\mathrm{O}\quad \mathrm{H}\quad \mathrm{O}\quad \mathrm{H}\quad \cdots\quad \mathrm{O}\quad \mathrm{H}\quad \mathrm{O}$$

뒷면이 연속해서 나오지 않으려면 T는 O자리에 하나씩만 나올 수 있으므로 뒷면이 연속해서 나오지 않는 경우의 수는 ${}_{17}\mathrm{C}_3 = 680$이다.

(2)

첫 번째 뒷면이 나오기 전에 나온 앞면의 수를 x_1, 첫 번째 뒷면과 두 번째 뒷면 사이에 나온 앞면의 수를 x_2, 두 번째 뒷면과 세 번째 뒷면 사이에 나온 앞면의 수를 x_3, 세 번째 뒷면 후에 나온 앞면의 수를 x_4라 하면 $x_1+x_2+x_3+x_4=16$이고,

$$x_1\ \mathrm{T}\ x_2\ \mathrm{T}\ x_3\ \mathrm{T}\ x_4$$

앞면이 항상 연속해서 두 번 이상 나오면서 뒷면이 연속해서 나오지 않으려면

$x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 2$이어야 하고, $j=1$, 4에 대하여 $x_j \neq 0$이면 $x_j \geq 2$이어야 한다. 따라서 다음 네 가지 경우가 가능하다.

(ⅰ) $x_1=0$, x_2, x_3, $x_4 \geq 2$

(ⅱ) $x_4=0$, x_1, x_2, $x_3 \geq 2$

(ⅲ) $x_1=x_4=0$, x_2, $x_3 \geq 2$

(ⅳ) x_1, x_2, x_3, $x_4 \geq 2$

(ⅰ) $x_1=0$, x_2, x_3, $x_4 \geq 2$인 경우

$x_2=y_2+2$, $x_3=y_3+2$, $x_4=y_4+2$라고 하면 $y_2+y_3+y_4=10$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수를 구하면 된다. 따라서 ${}_3\mathrm{H}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_{10} = 66$이다.

(ⅱ) $x_4=0$, x_1, x_2, $x_3 \geq 2$인 경우

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 66이다.

(ⅲ) $x_1=x_4=0$, x_2, $x_3 \geq 2$인 경우

$x_2=y_2+2$, $x_3=y_3+2$라고 하면 $y_2+y_3=12$을 만족하는 음이 아닌 정수 해의 개수를 구하면 된다. 따라서 ${}_2\mathrm{H}_{12} = {}_{13}\mathrm{C}_{12} = 13$이다.

(ⅳ) x_1, x_2, x_3, $x_4 \geq 2$인 경우

$x_1=y_1+2$, $x_2=y_2+2$, $x_3=y_3+2$, $x_4=y_4+2$라고 하면 $y_1+y_2+y_3+y_4=8$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수를 구하면 된다. 따라서 ${}_4\mathrm{H}_8 = {}_{11}\mathrm{C}_8 = 165$이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 앞면은 두 번 이상 연속해서 나오고 뒷면은 연속해서 나오지 않는 경우의 수는

$$66+66+13+165=310$$

이다.

(논제III)

(1)

점 Q의 좌표를 $(x_1,\, y_1,\, 0)$이라 두면 점 P는 선분 AQ를 $1:4$로 내분하는 점이므로

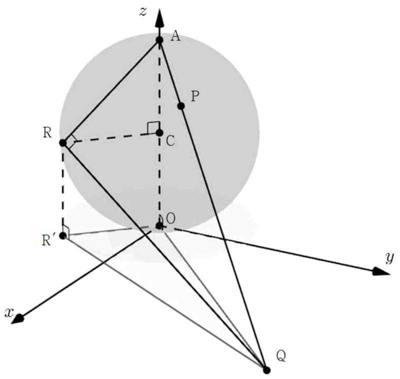
$$\mathrm{P}\left(\frac{1\times x_1+4\times 0}{5},\ \frac{1\times y_1+4\times 0}{5},\ \frac{1\times 0+4\times 2}{5}\right)=\left(\frac{x_1}{5},\ \frac{y_1}{5},\ \frac{8}{5}\right)$$

점 P의 좌표는 $(a,\, a,\, b)$이므로, $x_1=y_1=5a$이고 $b=\frac{8}{5}$이다. 한편 점 P는 구 위의 점이므로 $a^2+a^2+(b-1)^2=1$이고 이를 풀면, $a=\frac{2\sqrt{2}}{5}$, $x_1=y_1=2\sqrt{2}$가 된다.

따라서 점 P의 좌표와 점 Q의 좌표는 각각 $\left(\frac{2\sqrt{2}}{5},\ \frac{2\sqrt{2}}{5},\ \frac{8}{5}\right)$, $(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 0)$이다.

(2)

아래 그림과 같이 구 위의 점 R에서 xy평면에 내린 수선의 발을 R'이라 하면



삼각형 ARQ의 xy평면 위로의 정사영 F는 삼각형 $\mathrm{OR'Q}$이다. 이때, F의 넓이가 최대가 되려면 점 R'은 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있는 점들 중 선분 OR'이 선분 OQ와 수직인 점이며, 점 R의 z좌표는 1이어야 한다. (그림에서와는 달리 반대편에도 R이 위치 할 수 있다.)

또한 $\overline{\mathrm{R'Q}}=\sqrt{17}$이 된다. 점 R에서 z축에 내린 수선의 발을 C라 하면,

$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AO}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{OR}}^2}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{RQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{RR'}}^2+\overline{\mathrm{R'Q}}^2}=3\sqrt{2}$

이때 $\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AR}}^2+\overline{\mathrm{RQ}}^2$이므로 삼각형 ARQ는 직각삼각형이고, 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AR}}\times\overline{\mathrm{RQ}}=3$이다.

한편 삼각형 ARQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 삼각형 $\mathrm{OR'Q}$의 넓이 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{OR'}}=2$이다. 따라서 $\cos\theta=\frac{\triangle\mathrm{OR'Q}}{\triangle\mathrm{ARQ}}=\frac{2}{3}$이다.