홍익대학교 24 수시

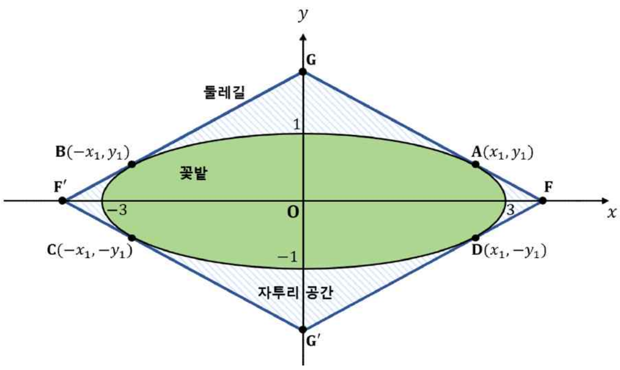
(문제1) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하여라. (20점)

중심이 원점 O이고, 장축 길이가 $6m$, 단축의 길이가 $2m$인 타원 모양의 경계를 갖는 꽃밭이 있다. 아래 그림과 같이 타원 위의 네 개의 점 $\mathrm{A}(x_1,\, y_1)$, $\mathrm{B}(-x_1,\, y_1)$, $\mathrm{C}(-x_1,\, -y_1)$, $\mathrm{D}(x_1,\, -y_1)$를 선택하여 이에 외접하는 사각형 모양의 둘레길을 만들려고 한다.
사각형 내부에서 타원 내부를 제외한 나머지 부분을 자투리 공간(아래 그림의 빗금 친 부분)이라 한다.
자투리 공간의 넓이가 최소가 되도록 둘레길을 만들려고 한다.

(가) $x_1 > 0,\, y_1 > 0$이며, 둘레길의 폭은 무시한다. 사각형의 네 꼭짓점은 $\mathrm{F},\, \mathrm{F}',\, \mathrm{G},\, \mathrm{G}'$이다.

(나) 꽃밭의 경계를 나타내는 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$이다. 꽃밭의 넓이는 $3\pi m^2$이며, 꽃밭의 경계의 폭은 무시한다.

(다) 임의의 실수 $r>0,\, s>0$에 대하여 $\sqrt{rs} \le \dfrac{r+s}{2}$이며 등호는 $r=s$일 때 성립한다.



(1) 방정식 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

(2) 점 $\mathrm{A}(x_1,\, y_1)$에서의 타원의 접선의 방정식을 $y=cx+d$이라고 하자. 문항 (1)의 결과를 이용하여, c를 x_1과 y_1에 대한 식으로 나타내고, d를 y_1에 대한 식으로 나타내시오.
또한, 이 접선의 x절편을 x_1에 대한 식으로 나타내시오.

(3) 자투리 공간의 넓이가 최솟값을 가질 때 x_1과 y_1을 구하고, 이때 자투리 공간의 넓이를 구하시오.

(4) 문항 (3)과 같이 자투리 공간의 넓이가 최솟값을 가지도록 둘레길을 설치하였다. 이후 점 F와 F'을 초점으로 가지고 점 G와 G'을 지나는 타원 모양의 울타리를 설치하려고 한다. 이 울타리를 나타내는 타원의 방정식을 구하시오. (단, 울타리의 폭은 무시한다.)

(문제2) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하여라. (20점)

홍익이는 아빠, 엄마와 함께 다음의 방식으로 주사위 놀이를 한다. 주사위는 정육면체이며, 주사위를 던졌을 때 각 면이 나올 확률은 모두 같다. 세 사람은 각자의 주사위를 가지고 있으며, 주사위의 각 면에는 서로 다른 자연수가 쓰여 있다.
주사위 놀이에서는 두 사람이 자신의 주사위를 동시에 한 번 던져 더 큰 수가 나온 사람이 승리한다. 홍익이, 아빠, 엄마의 주사위에 있는 총 18개의 면에는 모두 다른 자연수가 쓰여 있어 이 놀이에서 무승부는 나오지 않는다.
홍익이와 아빠의 주사위에 쓰인 숫자는 각각 다음과 같다.

홍익이의 주사위: $2,\ 4,\ 23,\ 25,\ 29,\ 31$
아빠의 주사위: $5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 35,\ 37$

(1) 홍익이의 주사위를 한 번 던져 나오는 수를 확률변수 X, 아빠의 주사위를 한 번 던져 나오는 수를 확률변수 Y라 하자. X와 Y의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{E}(Y)$를 구하시오.

(2) 홍익이와 아빠가 주사위 놀이를 한다면 둘 중 누가 더 유리한지 설명하시오.

(3) 홍익이와 아빠는 매일 한 번씩 총 405일간 주사위 놀이를 하였다. 홍익이가 승리한 날이 총 200일 이상이 될 확률을 아래의 표준정규분포표를 사용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
2.0	0.4772
3.0	0.4987

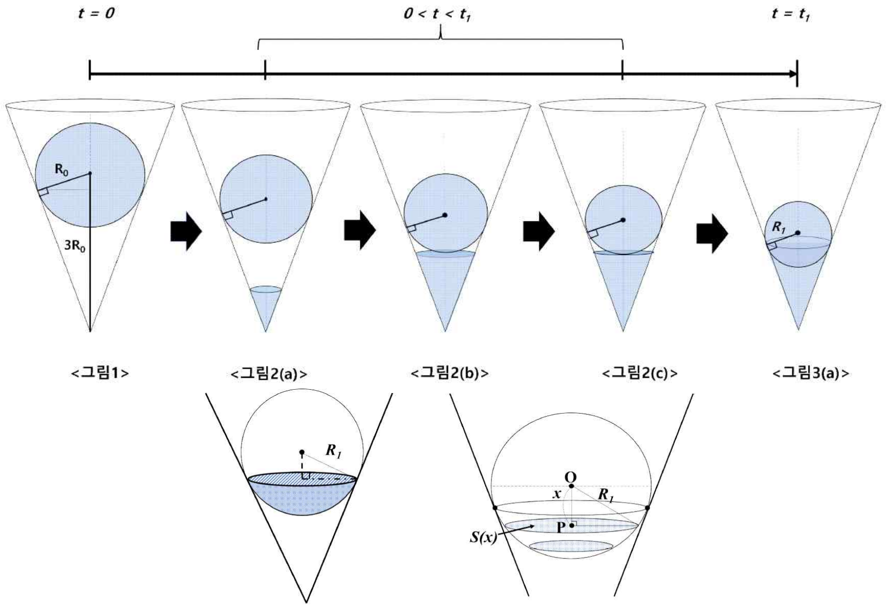
(4) 엄마의 주사위는 각 면의 자연수를 엄마가 임의로 선택하여 만들 수 있다. 단, 제시문의 설명과 같이, 홍익이, 아빠, 엄마의 주사위에 있는 총 18개의 면에는 모두 다른 자연수가 쓰여야 한다. 엄마는 이 주사위를 홍익이와 주사위 놀이를 할 때 사용하고, 같은 주사위를 아빠와 주사위 놀이를 할 때도 사용한다. 엄마가 홍익이와 주사위 놀이를 하여 엄마가 승리할 확률을 p_1이라 하고, 엄마가 아빠와 주사위 놀이를 하여 엄마가 승리할 확률을 p_2라 하자. 엄마가 $p_1 - p_2$가 최대가 되도록 주사위 각 면의 자연수를 선택한다고 할 때, $p_1 - p_2$의 최댓값은 무엇인지 설명하시오.

(문제3) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하여라. (20점)

홍익이는 〈그림1〉과 같이 반지름이 $R_0\,cm$이고 두께가 없는 구 모양의 특수 풍선을 제작하여 풍선 속에 물을 가득 담았다. 물풍선은 비어있는 원뿔 모양의 그릇(이하 원뿔그릇) 안에 놓이고, 원뿔 그릇 옆면에 접한다. 이때 물풍선의 중심과 원뿔 그릇 꼭짓점 사이의 거리는 $3R_0\,cm$이다. 물풍선 밑에는 작은 구멍이 있어서 풍선이 수축하며 이 구멍으로 물이 빠져나간다. t초 후 빠져나간 물의 부피는 $V(t)=\frac{\pi}{3}t\ cm^3$이다. 빠져나간 물은 〈그림2〉와 같이 원뿔 그릇의 아래부터 즉시 채워지며, 물이 떨어지는 데 걸리는 시간은 무시한다. 물이 빠져나간 만큼 부피가 줄어드는 물풍선은 항상 구 모양을 유지하며 원뿔 그릇 옆면에 접하고, 물풍선의 반지름은 R이라 한다. 〈그림$2(a)$〉부터 〈그림$3(b)$〉까지에 대한 설명은 아래와 같다.

- 〈그림$2(a)$〉 시각 $t\ (0<t<t_1)$에, 물풍선 구멍을 통해 빠져나간 물이 원뿔 그릇에 고여 원뿔 모양을 이룬다. 〈그림$2(b)$〉 시간이 지남에 따라 빠져나간 물이 이루는 원뿔의 밑면과 물풍선은 서로 접한다. 〈그림$2(c)$〉 이후 물풍선의 일부가 빠져나간 물에 잠긴다. 물풍선이 빠져나간 물이 잠긴 후에도 물풍선에서 물은 계속 빠져나간다.
- 〈그림$3(a)$〉 시각 t_1은 빠져나간 물이 원뿔 그릇과 이에 접하는 물풍선 사이의 공간을 모두 채우는 순간이다. 이때 물풍선의 반지름은 R_1이다. 〈그림$3(b)$〉는 시각 t_1에서 물풍선이 빠져나간 물에 잠긴 부분을 나타낸다. 물풍선의 중심 O에서 원뿔 그릇의 꼭짓점을 지나는 선분 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=x$라 하자.

이때 점 P를 지나고 원뿔 그릇의 밑면에 평행인 평면으로 물풍선을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하자.



<그림3(b)>

(1) 시각 t에서 물풍선의 반지름 R을 R_0과 t에 대한 식으로 나타내시오. $(0\le t\le t_1)$

(2) $S(x)$를 R_1과 x의 식으로 표현하시오.

(3) 시각 t_1에서 빠져나간 물에 잠긴 물풍선 부분의 부피를 R_1에 대한 식으로 나타내시오.

(4) $R_0=5$일 때, 시각 t_1를 구하시오.

(예시 답안)

(문제1)

(1) 음함수의 미분법을 이용하여 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{9}\right)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$
$$\Rightarrow \frac{2}{9}x+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{9y} \quad (\text{단, } y\neq 0)$$

(2) $(x_1,\ y_1)$위에서의 기울기는 $c=-\frac{x_1}{9y_1}$이 된다. 이를 접선의 방정식 $y=c(x-x_1)+y_1$에 대입하면

$$y=-\frac{x_1}{9y_1}(x-x_1)+y_1=-\frac{x_1}{9y_1}x+\left(\frac{x_1^2}{9y_1}+y_1\right) \qquad \cdots ①$$

한편, $(x_1,\ y_1)$은 타원 위에 있는 점이므로 $\frac{x_1^2}{9}+y_1^2=1$을 만족한다. 이를 이용하면

$$\frac{x_1^2}{9y_1}+y_1=\frac{1}{y_1}$$

이 되어, $c=-\frac{x_1}{9y_1}$, $d=\frac{1}{y_1}$이다. 이를 이용하면 접선의 x절편은 $\frac{9}{x_1}$가 된다.

(3) 해당 둘레길이 x축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{F}(a,\ 0)$과 $\mathrm{F}'(-a,\ 0)$라 하고, y축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{G}(0,\ b)$과 $\mathrm{G}'(0,\ -b)$라 하자. (단, $a>0,\ b>0$이다.) a와 b는 각각 (2)에서 구한 접선의 x절편과 y절편이므로 $a=\frac{9}{x_1}$, $b=\frac{1}{y_1}$임을 알 수 있다. 둘레길은 마름모 모양이며 내부의 넓이는 $2ab=\frac{18}{x_1y_1}$이다. 꽃밭의 넓이는 3π이므로, 자투리 공간의 넓이는

$$\frac{18}{x_1y_1}-3\pi$$

가 된다. 한편, $(x_1,\ y_1)$은 제시된 타원 방정식 위의 점이므로 다음을 만족한다.

$$1=\frac{x_1^2}{9}+y_1^2$$

제시문 (다)를 이용하여 아래의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$1=\frac{x_1^2}{9}+y_1^2\geq 2\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{9}\right)y_1^2}=\frac{2x_1y_1}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x_1y_1}\geq\frac{2}{3} \qquad \cdots ②$$
$$\Rightarrow \frac{18}{x_1y_1}-3\pi\geq 12-3\pi$$

등호는 $\frac{x_1^2}{9}=y_1^2=\frac{1}{2}$일 때 성립한다. 즉, 자투리 공간의 총 넓이의 최솟값은 $12-3\pi$이고, 이때 $(x_1,\ y_1)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.

(4) 문항 (3)으로부터, 둘레길을 나타내는 마름모의 네 꼭짓점 좌표는 각각 $\mathrm{F}\left(\frac{9}{x_1},\ 0\right)$, $\mathrm{F}'\left(-\frac{9}{x_1},\ 0\right)$, $\mathrm{G}\left(0,\ \frac{1}{y_1}\right)$, $\mathrm{G}'\left(0,\ -\frac{1}{y_1}\right)$이다. 피타고라스 정리를 활용하여 마름모의 한 변의 길이를 구하면 $\sqrt{\left(\frac{9}{x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{y_1}\right)^2}$가 되므로, 울타리 장축의 길이는 $2\sqrt{\left(\frac{9}{x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{y_1}\right)^2}$이다. 여기에 문항 (3)에서 구한 $(x_1,\ y_1)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$를 대입하면, 울타리의 장축의 길이는 $4\sqrt{5}$가 된다. 한편, 단축의 길이는 $\frac{2}{y_1}=2\sqrt{2}$이다. 이를 활용하여 울타리를 나타내는 타원의 방정식을 구하면

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{2}=1$$

이 된다.

(문제2)

(1) $\mathrm{E}(X)=\dfrac{2+4+23+25+29+31}{6}=19$, $\mathrm{E}(Y)=\dfrac{5+7+11+13+35+37}{6}=18$

(2) 홍익이와 아빠 두 사람이 동시에 주사위를 던졌을 때 홍익이가 승리할 경우의 수를 나타내는 다음의 표에서 홍익이가 승리할 확률은 $\dfrac{4}{9}$이며, 아빠가 승리할 확률은 $\dfrac{5}{9}$이므로 아빠가 더 유리하다.

	2	4	23	25	29	31
5	×	×	○	○	○	○
7	×	×	○	○	○	○
11	×	×	○	○	○	○
13	×	×	○	○	○	○
35	×	×	×	×	×	×
37	×	×	×	×	×	×

(3) 홍익이가 승리한 날의 수를 확률변수 W라 하면, W는 이항분포 $\mathrm{B}\left(405,\ \dfrac{4}{9}\right)$를 따르며, 평균 m과 표준편차 σ는 각각 $m=405\times\dfrac{4}{9}=180$, $\sigma=\sqrt{405\times\dfrac{4}{9}\times\dfrac{5}{9}}=\sqrt{100}=10$이다.

확률변수 W는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 10^2)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(200\le W)=\mathrm{P}\left(\frac{200-180}{10}\le Z\right)=\mathrm{P}(2\le Z)=\frac{1}{2}-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.5-0.4772=0.0228$$

이다.

(4) A를 홍익이의 주사위에 쓰인 자연수들의 집합이라 하고, B를 아빠의 주사위에 쓰인 자연수들의 집합이라 하자. A 또는 B에 속하지 않은 자연수 n에 대해 $f(n)$을 n보다 작은 A의 원소의 개수라 하고, $g(n)$을 n보다 작은 B의 원소의 개수라 하자. 만약 a_i를 엄마의 주사위에 쓰인 i번째 자연수라 하면, $\sum_{i=1}^{6} f(a_i)$는 엄마와 홍익이의 주사위 놀이로 나오는 36개의 결과 중 엄마가 승리하는 경우의 수이므로

$p_1=\dfrac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} f(a_i)$이다.

같은 이유로 $p_2=\dfrac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} g(a_i)$이며 $p_1-p_2=\dfrac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}(f(a_i-g(a_i))$이 성립한다.

다음의 표는 A 또는 B에 속하지 않은 자연수 n에 대해, 그 자연수가 속한 구간에 따른 $f,\ g,\ f-g$의 값을 나타낸다.

A		2		4									23		25		29		31					
B					5		7		11		13										35		37	
f	0	×	1	×	×	2	×	2	×	2	×	2	×	3	×	4	×	5	×	6	×	6	×	6
g	0	×	0	×	×	1	×	2	×	3	×	4	×	4	×	4	×	4	×	4	×	5	×	6
$f-g$	0	×	1	×	×	1	×	0	×	-1	×	-2	×	-1	×	0	×	1	×	2	×	1	×	0

따라서 $p_1-p_2=\dfrac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}(f(a_i-g(a_i))$의 값이 최대가 되는 경우는 엄마가 $f-g$의 값이 2인 31과 35사이의 세 자연수 $32,\ 33,\ 34$를 모두 선택하고, $f-g$의 값이 1인 $3,\ 6,\ 30,\ 36$ 중 임의로 나머지 세 자연수를 선택하는 경우이므로, p_1-p_2의 최댓값은

$p_1-p_2=\dfrac{3\times2+3\times1}{36}=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$이다.

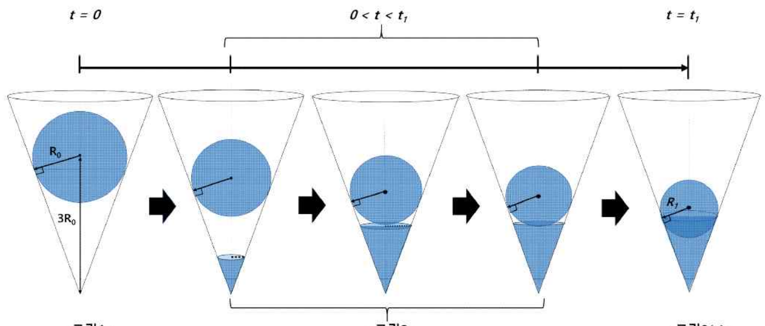
(문제3)

(1) 처음 물풍선의 반지름 : R_0

t초 후, 물풍선을 빠져나간 물의 부피 : $V(t) = \frac{\pi}{3}t$

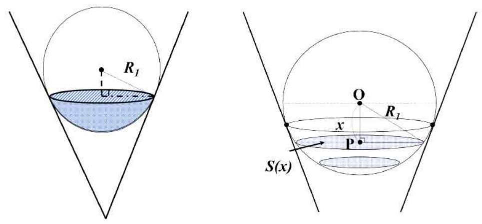
물이 빠져나간 후의 물풍선의 반지름을 R라 하면,

$\Rightarrow$ 물이 빠져나가 변한 물풍선의 부피 : $V(t) = \frac{\pi}{3}t = \frac{4}{3}\pi(R_0^3 - R^3) \Rightarrow R = \left(r_0^3 - \frac{1}{4}t\right)^{\frac{1}{3}}$



<그림1> <그림2> <그림3(a)>

(2)



<그림3(b)>

물풍선의 반지름은 R_1이고, $\overline{\mathrm{OP}} = x$이므로 피타고라스의 정리를 이용하면

단면인 원의 반지름은 $\sqrt{(R_1^2 - x^2)}$이다.

따라서 원의 넓이는 $S(x) = \pi(R_1^2 - x^2)$이다.

(3) 삼각형 닮음을 이용하면 x가 $\frac{1}{3}R_1$부터 R_1까지의 변화에 대해 넓이 $S(x)$를 적분한 값이 된다.

$$\int_{\frac{R_1}{3}}^{R_1} \pi(R_1^2 - x^2)dx = \pi\left[R_1^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{R_1}{3}}^{R_1}$$

$$= \pi\left[R_1^3 - \frac{R_1^3}{3} - \frac{R_1^3}{3} + \frac{R_1^3}{81}\right] = \frac{28}{81}\pi R_1^3$$

이다.

(4) 시각 t_1에서 물에 잠기지 않은 물풍선의 부피와 접선이 이루는 면을 밑면으로 하는 원뿔의 부피의 합은 시각 0초에서 물풍선의 부피와 같아야 한다. 각각을 다음과 같이 구한다.

(가) 시각 0초에서 물풍선의 부피 : $\frac{4}{3}\pi R_0^3$

(나) 빠져나간 물의 부피 : $\Delta V = \pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R_1\right)^2 \times \frac{8}{3}R_1 \times \frac{1}{3} - \frac{28}{81}\pi R_1^3 = \frac{64}{81}\pi R_1^3 - \frac{28}{81}\pi R_1^3$

$$= \frac{36}{81}\pi R_1^3$$

즉, $R_2^3 = \frac{81}{36\pi}\Delta V$

(다) 작아진 풍선의 부피 $\Delta V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3$

$\Rightarrow \Delta V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{81}{36\pi}\Delta V\right) \Rightarrow \Delta V = \frac{1}{3}\pi R_0^3$

따라서 $\Delta V = \frac{\pi}{3}t_1 = \frac{1}{3}\pi R_0^3$, $R_0 = 5$이므로 $t_1 = \frac{3}{\pi}\frac{1}{3}\pi R_0^3 = 5^3 = 125$, t_1는 125초이다.